Zum Problem der konzeptionellen Unvereinbarkeit von Gravitation und Quantentheorie

Ein von der Geometrie dominierter Ansatz

die mathematische Beschreibung von Gravitations-Wellen und ihr grundlegender Zusammenhang mit dem Vierer-Weg-Integral und der Einstein-Hilbert-Wirkung

wissenschaftliche Abhandlung

von

Torsten Pieper

Dezember 2018

Allgemein relativistische Strukturquanten - Theorie

Quantenmechanik als linearer Grenzfall einer umfassenderen nichtlinearen, quasilokalen Tensorfeld-Gleichung in vier Dimensionen

Ist die Gravitation nur eine von vier Kräften, die quantisiert gehört? Oder ist sie mehr? Die vorliegende Analogie könnte darauf hindeuten, dass sie die unquantisierte Form einer Theorie darstellt, die über die Quantenmechanik hinausgeht. In dieser Diskussion wird dargelegt, dass eine Quantengravitation die lineare Quantenmechanik als Grenzfall enthält, wie die ART die newtonsche Mechanik beinhaltet.

Einleitung

Fast von Anfang an, seit Erarbeitung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Albert Einstein und David Hilbert 1915 und seit der Entdeckung der Prinzipien der Quantenmechanik zwischen 1905 und 1925 durch eine ganze Reihe großartiger Wissenschaftler, laufen weltweit Bemühungen, diese Theorien zu vereinen. Bislang erfolglos. In über 80 Jahren sind viele neue Theorie-Gebäude erdacht - und wieder verworfen worden. Nur wenige Theorien, in erster Linie die String-Theorie und die Loop-Quantengeometrie, zeigen zumindest Hinweise auf mögliche Lösungen auf.

Dabei könnten diese Ansätze nicht verschiedener sein. Zudem agieren beide in Domänen welche mit heutigen Mitteln nicht überprüfbar sind. Noch eklatanter stehen manche ihrer Grundannahmen im Widerspruch zu den etablierten Theorien, welche immer wieder durch Beobachtung und Versuch exzellent bestätigt wurden.

Im Rahmen dieser Arbeit soll lediglich aufgezeigt werden, dass gewisse Hinweise existieren, welche die lineare Quantenmechanik als Grenzfall einer nichtlinearen Tensorfeld-Gleichung erscheinen lassen. Die zugrundeliegende Analogie könnte eine Reihe von Problemen lösen helfen.

Eines soll dabei sichergestellt sein:

Gemäß dem Korrespondenzprinzip muss eine neue Theorie in bestimmten Situationen die Quantenmechanik und die ART als Grenzfälle reproduzieren.

Für große Massen und Abstände gelte die ART, für kleine Massen und Abstände entsprechend die Quantenmechanik. Um ein Beispiel zu nennen: Die Loop-Quantengeometrie hat enorme Probleme die ART, also eine der Grenzen zu reproduzieren.

Die neue Theorie verbindet diese Extreme und schließt die Lücke. Wie einst die quantisierte Formel für die Schwarzkörperstrahlung von Max Planck ebenfalls zwei Extreme miteinander versöhnte und damit eine neue Disziplin begründete.

In einer neuen Darstellung stellt sich die lineare Quantenmechanik nicht als fundamentale, sondern als effektive Theorie dar. Ihre koordinaten-behaftete Gleichung wäre ein Spezialfall einer Tensorfeld-Gleichung.

Ein derartiger Ansatz würde neben der linearen Wellengleichung noch weitere mögliche Lösungen liefern, insbesondere für hochenergetische Prozesse. Analog zu den verschiedenen Symmetrie- und Grenzfallbetrachtungen der ART würde sich die Lösungsmenge stark erweitern. Bestimmte Probleme der QFT wären unter Umständen durch ganz neue Ansätze lösbar, etwa die bislang nur durch Renormierung beherrschbaren Divergenzen und Unendlichkeiten der Theorie, welche sich ergeben, sobald man die Feldquellen selbst betrachtet und nicht nur deren Interaktionen.

Inhalts-Angabe

1 Wesentliche Unterschiede zwischen Quantenmechanik und ART

Was macht die Vereinigung der zwei Hauptstützen der Physik so schwierig?

Worin liegen die größten Unterschiede zwischen Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie?

Die ART ist eine lokale Feldtheorie.

Die Quantenmechanik ist hingegen nichtlokal. Das zugrundeliegende Wahrscheinlichkeits-Feld wird als unendlich ausgedehnt aufgefasst. Bestimmte Effekte scheinen instantan, d.h. unabhängig von Abständen zu erfolgen.

Die ART ist hochgradig nichtlinear.

Die Quantenmechanik erscheint hingegen in jedem bekannten Fall auf fundamentale Weise linear. Dies äußert sich insbesondere im Prinzip der ungestörten Superposition. Im Rahmen der ART ist dieses nicht allgemein anwendbar. Eine Summe von zwei Lösungen ist keine neue Lösung der Theorie.

Die ART ist keine gewöhnliche Feldtheorie. Die Gravitation ist kein Feld im Raum, sondern wird als Krümmung der Raumzeit beschrieben. Die mathematische Darstellung ist eine kovariante Tensorfeld-Gleichung. Sie setzt also keine Hintergrundmetrik voraus, sondern definiert sie. Das macht die Theorie diffeomorphismus-invariant und hintergrund-unabhängig.

Im Gegensatz setzt die Quantenmechanik einen Raumzeit-Hintergrund voraus. Die beste Darstellung ist immerhin unter Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie invariant, erfordert jedoch weiterhin die Minkowski-Raumzeit als Vorgabe.

2 Voraussetzungen zu einer vereinheitlichten Beschreibung

Welche Eigenschaften müsste eine vereinigte Theorie aufweisen um die Grenzfälle aus einem Ansatz heraus, ohne Zusatzannahmen, zu reproduzieren?

Was ist unabdingbar notwendig für ihre axiomatische und mathematische Form?

Um die ART ganz allgemein zu reproduzieren, erscheint es notwendig, eine umfassendere Theorie kovariant und in Form einer Tensorfeld-Gleichung zu schreiben. Doch es sollte möglich sein sie zu linearisieren und in Abhängigkeit von Koordinaten zu beschreiben. Solche speziellen Herangehensweisen führen im Rahmen der ART z.B. zum newtonschen gravitoelektrischen Feld, dem darüber hinausgehenden Feld des Gravitomagnetismus und zu Gravitationswellen. Dies ist für die spätere Argumentation entscheidend!

Welche Axiome der Quantenmechanik müssen hinzukommen? Welche sind verzichtbar, bzw. könnten bereits unabhängig von der Quantenmechanik reproduziert werden?

Das grundlegende Prinzip der Wirkungs-Quantisierung muss in jedem Fall in die neue Theorie eingehen.

Das Prinzip des Operators kann zum kovarianten Fall erweitert werden. Es ist letztlich nur eine Schreibweise der Gleichungen und keine explizite Forderung an die Theorie.

Die als fundamental angenommene Wellenfunktion der Quantenmechanik könnte sich hingegen als effektive Annahme erweisen, die nur einen begrenzten Gültigkeitsbereich hat! Es gibt wie schon oben angedeutet Möglichkeiten, solche Funktionen aus einer allgemeineren Feld-Funktion abzuleiten.

3 Grenzen der Quantenmechanik

Den wohl größten Einfluss auf die Inkompatibilität mit der ART hat die Linearität der Quantenmechanik.

Bisherige Modelle zu einer Quantengravitation versuchen sie aber einzubauen und erleiden damit Schiffbruch. Dabei ist nicht einmal gesagt, dass diese Linearität allgemein gültig ist. Es gibt lediglich noch keinen experimentellen Hinweis auf eine andere Form.

Der Bereich, in dem Quanteneffekte der Gravitation aus heutiger Sicht relevant werden, hängt mit Energien in der Größenordnung der Planck-Energie zusammen. Doch das schwerste bekannte Elementarteilchen, das Top-Quark, besitzt gerade mal eine Masse die dem 10^{-17}ten Teil der Planckmasse entspricht. Die höchste, jemals in einem Beschleuniger erreichte Energie, ist mit 7 Tev gerade 40-mal höher und damit auch nicht viel näher am interessanten Bereich.

Bekannte physikalische Effekte bis zu diesen Energien werden durch die lineare Quantenmechanik offenbar hinreichend genau beschrieben. Tatsächlich ist die Quantenfeldtheorie die am genauesten bestätigte Theorie überhaupt.

Doch hat das Standardmodell der Teilchenphysik seine Tücken. Es enthält zu viele unerklärte Naturkonstanten, darunter alle Ruhmassen der elementaren Fermionen.

Außerdem müssen mathematische, nicht empirisch oder physikalisch begründbare, Tricks verwendet werden, um Felder zu beschreiben: Näherungsverfahren, Renormierung, cutoffs und damit verbunden die Unterscheidung zwischen sogenannten effektiven und nackten Ladungen. Doch all diese Tricks und die Einführung neuer Kräfte verschieben die Lösung der auftretenden Probleme nur.

Streng genommen ist Quantenfeldtheorie nur in der Lage die Wechselwirkungen zwischen Fermionen zu beschreiben und die entsprechenden Austausch-Bosonen. Wendet man sie hingegen auf die Quellen der Felder selbst an, bekommt man unsinnige Ergebnisse.

Auch Wechselwirkungs-Raten gehen irgendwann gegen Unendlich. Sie sind quasi die Singularitäten der Quantenmechanik.

Die Anwendung von Renormierungverfahren wurde in dem Zusammenhang von (dem niederländischen Physiker und Nobelpreisträger) Martinus Veltman im Jahr 2003 einmal sehr ironisch bewertet: "Nonsense minus nonsense gives somit OK!"

Streng genommen gibt es bisher keine Theorie der Ladungen. Sie sind in die Theorie gegebene Messwerte und können nicht vorhergesagt werden.

Ab wann nun nichtlineare Einflüsse messbar werden könnten, kann mit dem jetzigen Wissensstand der Elementarteilchen-Physik nicht gesagt werden.

Rein aus ästhetischen Gründen liegt die Annahme nahe, dass die lineare Quantenmechanik mit zunehmender Energie stetig in eine nichtlineare Form übergeht. Und dass die Singularitäten der Gravitation mit den gegen unendlich gehenden Wechselwirkungs-Raten der QFT identifiziert werden können.

Das wäre eine mögliche Folgerung der Identifikation der Quantenmechanik als linearen Grenzfall einer übergeordneten nichtlinearen Theorie.

Was könnte eine Nichtlinearität bedeuten?

Photonen überlagern sich gegenseitig und trennen sich wieder, ohne ihre Form zu ändern. Sie gehorchen dem Prinzip der ungestörten Superposition. Das ist ein Aspekt der Linearität.

Bestimmte Lösungen der ART weisen hingegen darauf hin, dass starke Gravitationswellen zusammenlaufen und dabei zu einem neuen gemeinsamen Zustand finden könnten. Man spricht von kritischen Brillwellen und ihr finaler Endzustand entspricht einem Schwarzen Loch.

Denn die Größe Krümmung soll der Kern der neuen Theorie bleiben. Im Gegensatz zur etablierten Quantenmechanik müsste neben der ersten auch die zweite Ableitung einer Feldfunktion betrachtet werden. Das sieht man schon bei der eher einfachen Quantisierung von Gravitationswellen. Später wird sich zudem zeigen, dass es durchaus Energien äquivalenten Vorgänge geben kann, die keine Krümmung erzeugen und daher weder gravitativ wechselwirken, noch direkt beobachtbar sind.

Die Erkenntnisse der Relativitätstheorie sind scheinbar allgemein wichtiger und tiefgründiger als jene der Quantenmechanik: So sagt die spezielle Relativitätstheorie aus, dass Energie und Masse austauschbar sind. Dies ist allgemein gültig. Dann erst kommt die Quantenmechanik ins Spiel und stellt die Nebenbedingung: Aber nur, wenn die Quantenzahlen stimmen.

4 Die Energie linearer Gravitationswellen – der erste Hinweis

Jeder wird darin übereinstimmen, dass Gravitationswellen Energie durch den Raum transportieren. Dies zeigt sich nicht zuletzt bei der Beobachtung von astronomischen Objekten, etwa eng stehenden Binärpulsaren und der Tatsache, dass in solchen Fällen ein Energieverlust ersichtlich wird. Dieser Energieverlust lässt sich im Rahmen der ART durch Gravitationswellen eindeutig berechnen.

Der direkte Nachweis von Gravitationswellen wurde inzwischen erbracht.

Lineare Gravitationswellen folgen aus einer Betrachtung in der unter anderem die Selbstwechselwirkung der Gravitation vernachlässigt wird. Weiterhin wird für gewöhnlich ihr Verlauf auf einer flachen Hintergrundmetrik betrachtet und ihre Amplitude gering angesetzt.

Unter diesen Voraussetzungen können Gravitationswellen mit einer normalen homogenen Wellengleichung beschrieben werden[1].

$$e_{\mu\nu}(x,t) = F_{uv} * e^{(i*(\omega*t-k*x))} \tag{1.1}$$

In dieser Form sind Gravitations-Wellen, ähnlich dem newtonschen Gravitationsfeld, als Feld im Raum darstellbar, mit den ungestörten Koordinaten x,y,z und t, der tensoriellen Amplitude F_{uv} (geringe Störung der Metrik h_{uv}), der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k. Die Metrik wird absichtlich umbenannt, um später Verwechslungen mit dem Wirkungsquant h zu vermeiden.

Die Energie welche Gravitationswellen tragen, bestimmt sich über ihre zweifache kovariante Ableitung. Es ergibt sich hierbei ein Ausdruck, ein Pseudo-Tensor zweiter Stufe, dessen Elemente Energiedichten sind.

Diese Energiedichten sind hier im Wesentlichen von der Amplitude der metrischen Störung und ansonsten nur noch vom Quadrat ihrer Wellenzahl abhängig.

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi\gamma} * k_\mu * k_\nu * |F_{\mu\nu}| \tag{1.2}$$

Die Energiedichten bestimmen sich also durch die Krümmungen der Wellenfunktion.

Sucht man nach einem Integral zur Bestimmung des Energiebetrags in gewissen Grenzen, ergibt sich automatisch, dass sich dieser Energiedichte-Tensor zu einem Vektor reduziert, dessen Komponenten Energie-Flächendichten entsprechen. Nach der Zeit abgeleitet entspricht dieser Vektor einem gerichteten Energie-Fluss I.

$$E_\mu/_A = \frac{c^4}{8\pi\gamma} * k_\mu * |F_{\mu\nu}| \tag{1.3}$$

$$I_\mu = d/dt\left(\frac{c^4}{8\pi\gamma} * k_\mu * |F_{\mu\nu}|\right) \tag{1.4}$$

Wichtig erscheint nun, dass diese Energie proportional der Wellenzahl und damit proportional der Frequenz der Wellenfunktion ist. Dies ergibt einen unerwarteten Zusammenhang zur bis hierher nicht betrachteten Quantenmechanik!

In beiden Fällen sind Energie und Frequenz proportional. Lässt man die in der Energiedichte-Funktion skalar auftretende Amplitude F_{uv} einmal außer Acht.

Damit ist die Proportionalität von Energie und Frequenz nicht länger ein reines Postulat, sondern eine Folge der Proportionalität von Raumzeit-Krümmung und Energiedichte im Rahmen der ART.

Die Analogie zwischen zwei scheinbar vollkommen zusammenhanglosen Theorien wird noch deutlicher, setzt man die punktsymmetrisch angenommene Planckfläche als durchströmte Fläche an.

$$E_\mu/A = \frac{c^4}{8\pi\gamma} * k_\mu * |F_{\mu\nu}| \tag{1.5}$$

Da hier die Kreiszahl, bzw. die Winkelfrequenz auftritt, wird von der reduzierten Planklänge ausgegangen, so dass, wie in der Quantenmechanik, das reduzierte Wirkungsquantum den Faktor 2π ausgleicht. Zudem wird aus Symmetriegründen die Planklänge analog einem Kreisradius angesetzt. Die tiefergehende Begründung wird später klar.

$$A = A_0 * \pi = \pi * \hbar \times \gamma/c^3 \tag{1.6}$$

Damit ergibt sich die Energie zu

$$E_\mu = \frac{c^1}{8\pi} * \hbar * k_\mu * |F_{\mu\nu}| \tag{1.7}$$

$$E = \frac{c^1}{8\pi} * \hbar * |k| * |F_{\mu\nu}| \tag{1.8}$$

$$E = \frac{1}{8\pi} * \hbar * \omega * |F_{\mu\nu}| \tag{1.9}$$

$$E = \mathrm{h} * f * \frac{|F_{\mu\nu}|}{8\pi} \tag{1.10}$$

Von allen Naturkonstanten bleibt nur das Wirkungsquantum übrig.

Damit ist die vorliegende Herleitung die einzige, mit welcher die Energie-Frequenz-Relation eindeutig und unabhängig von der Quantenmechanik hergeleitet werden kann. Die Divergenzen (Krümmungen) aller anderen konservativen Felder führen zu anders gearteten Ladungs- bzw. Stromdichten und können daher nicht zur Definition einer Energie herangezogen werden. Ihre Energiedichten hingegen sind proportional dem Quadrat ihrer Feldstärken:

$$\text{z.B. } w = {}^{1}/_{2} * \varepsilon_0 * E^2 + {}^{1}/_{2} * {}^{1}/_{\mu_0} * B^2 = \varepsilon_0 * E^2 \tag{1.11}$$

$$E^2(x,t) = E_m^2 * \cos(\omega * t - k * x)^2 \tag{1.12}$$

Es muss über das Quadrat der Kosinus-Funktion integriert werden:

$$\int \cos(-k * x)^2 * dx = x/2 + \sin(-2 * k * x)/(-4 * k) \tag{1.13}$$

Das Integral über eine Wellenlänge führt zu:

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\sin\left(4 * \frac{\pi}{\lambda} * \lambda\right)}{-4 * k} = \frac{\lambda}{2} + 0 = \frac{\lambda}{2} \tag{1.13}$$

$$\frac{W}{A} = \varepsilon_0 * E_m^2 * \lambda/2 \tag{1.14}$$

Auch nach Einbringen der Planckfläche A_0 gibt es keinen Zusammenhang mit der Energie-Frequenz-Relation nach Planck. Die Energie nimmt mit der Wellenlänge zu statt ab!

$$\lambda\!\!\!^{-}_{c} * R_G = \frac{\hbar}{m \times c} * \gamma * \frac{m}{c^2} = \frac{\hbar * \gamma}{c^3} = A_0 \tag{1.15}$$

Während der Entwicklung der ersten quantenmechanischen Formeln zur Schwarzkörperstrahlung wurde die Energie-Frequenz-Relation von Max Planck empirisch eingeführt.

Später zeigte es sich, dass sie für jede beliebige Form der Energie gilt, unabhängig von der Struktur oder ihrer Herkunft. Der daraus folgende Welle-Teilchen-Dualismus verknüpft die Intensität einer Welle mit einer Partikel- hier Photonenstromdichte:

$$I = \varepsilon_0 * E_m^2 * c = h * f * n = \left[\frac{J}{m^3} * \frac{m}{s}\right] = [\mathrm{Watt/m^2}] \tag{1.16}$$

n = [1/m^2/s] Anzahl der Photonen der Energie h*f welche pro Sekunde durch eine Fläche strömen.

Aus der heuristischen Herleitung der Schrödingerschen Wellengleichung folgt, dass der Ausdruck für die Energiedichte einer Partikeldichte proportional ist. Sie beschreibt eine Wahrscheinlichkeit dafür Photonen am entsprechenden Ort anzutreffen. Dies gilt auch für ein einzelnes Photon, was zu schwierigen philosophischen Implikationen führt.

In der Schrödinger-Gleichung und besser sichtbar in der Herleitung der Dirac-Gleichung taucht nun der Ausdruck für die (gravitative!) Energiedichte indirekt wieder auf. Die Energie eines quantenmechanischen, relativischen Systems genügt der Klein-Gordon-Gleichung[5]:

$$(i * \hbar * d/dt)^2 * \Psi(r,t) = -c^2 * \hbar^2 * \Delta\Psi(r,t) + m^2 * c^4 * \Psi(r,t) \tag{1.17}$$

Der Ausdruck $c^2 \times \hbar^2 \times \Delta\Psi(r,t)$ entspricht der kinetischen Energie $(c^{\times}p)^2$ eines Teilchens, berechnet sich aber aus der Divergenz (Krümmung) der Wellenfunktion, genau wie schon bei der Betrachtung von Gravitationswellen und der Ableitung der Energie-Frequenz-Relation angesetzt. Da diese Wellen keine Ruhmasse besitzen, kann die Energie über den reinen Impuls berechnet werden, genauso wie bei Photonen.

Das Auftauchen der Planck-Fläche ist an dieser Stelle nicht so interessant wie die Tatsache, dass aus dem Ansatz über die Krümmung die Relation zwischen Energie und Frequenz folgt.

Paradoxerweise hat somit die Gravitation, entgegen aller Lehrmeinung, einen innigeren Zusammenhang zur Quantenmechanik als alle anderen Kräfte! Das Problem – mit den Verfahren der Standardtheorie der Elementarteilchen lässt sich die Gravitation nicht quantisieren – ist weniger physikalischer als vielmehr mathematischer Natur! Irgendwo scheint bei der Quantisierung der ART eine falsche Grundannahme vorzuliegen. Warum greifen die Standardverfahren der linearen Quantenmechanik nicht?

Lässt sich aus der formalen Äquivalenz zwischen linearen Gravitationswellen und linearer Quantenmechanik ein sinnvoller Schluss ziehen?

5 Lineare Quantenmechanik als Spezialfall einer Tensorfeld-Gleichung

Es gibt einen ersten Hinweis, warum die Gravitation mit den herkömmlichen Verfahren nicht quantisierbar und in gewisser Hinsicht für die Grundgleichung der Quantenmechanik sogar ursächlich ist.

Im vorigen Kapitel ergab sich, dass die Energie einer Gravitationswelle automatisch ihrer Frequenz proportional ist, ohne, dass man die Quantenmechanik hinzuziehen müsste. Es ergibt sich eine formale, aber starke Ähnlichkeit zwischen der Beschreibung von Gravitationswellen und der Wellengleichung der Quantenmechanik. Nun ergibt sich die Wellengleichung in der ART durch Linearisierung und Eichung der Theorie.

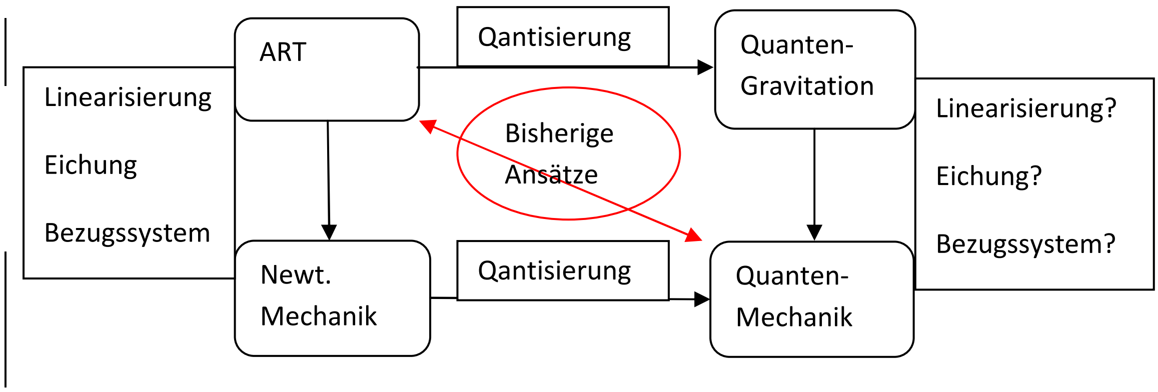
Kann man etwas aus dieser formalen Ähnlichkeit schließen?

Die vorliegende Analogie könnte darauf hindeuten, dass die lineare Quantenmechanik lediglich einen Grenzfall einer Quantengravitations-Theorie darstellt und nicht ihre Basis. Das würde die bisherige Inkompatibilität zwischen ART und Quantenmechanik erklären und zudem einen neuen mathematischen Zugang zur Beschreibung hochenergetischer Vorgänge begründen.

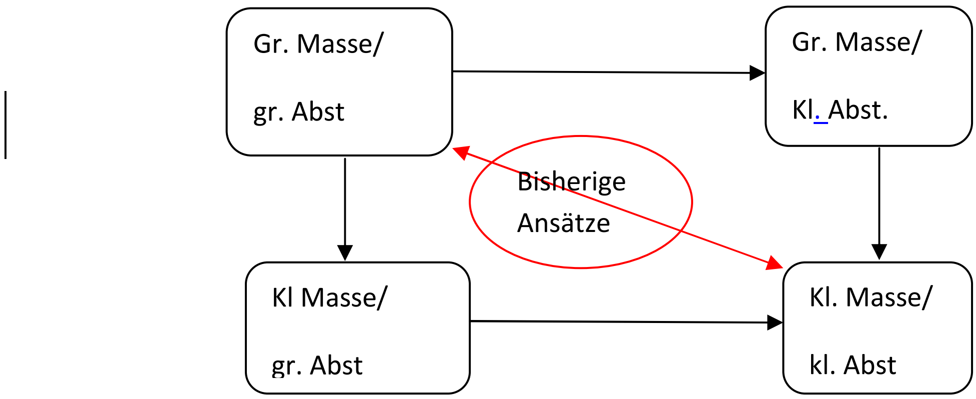
Die Wellen-Gleichung der Gravitationswellen erhält man durch Linearisierung und Eichung der Tensorfeldgleichung der ART und durch Bezug auf ein konstantes Hintergrund-Koordinaten-System vom Minkowsky-Typ.

Die Wellen-Gleichung der Quantenmechanik könnte nun analog durch denselben Ansatz aus einer quantisierten Tensorfeldgleichung folgen.

Relationen zwischen den Theorien



Relationen zwischen den Gültigkeitsbereichen der Theorien



Das würde mit einem Schlag die bisherige konzeptionelle Unvereinbarkeit von QM und ART lösen. Die quantisierte ART, abgekürzt QART, wäre nach wie vor durch eine Tensor-Feldgleichung dargestellt. Ihre Lösungen können je nach gewählten Rand- und Symmetriebedingungen in unterschiedlichen Koordinaten-Systemen beschrieben werden. Insbesondere in linearisierter Fassung müssten sich quantisierte Abarten für das newtonsche Gravitationfeld, das gravitomagnetische Feld und für eine homogene Wellengleichung ergeben.

Letztere ergäbe die geometrische Sicht auf Schrödinger- und Dirac-Gleichung.

6 Weitere Hinweise

Auch von der Quantenmechanik ausgehend, könnte auf eine Art Tensorfeld-Gleichung geschlossen werden: Die skalare Schrödingergleichung ist nicht invariant unter Lorentz-Transformation. Die Forderung nach Invarianz brachte Paul AM Dirac auf die nach ihm benannte Gleichung. Diese ist strukturell einem Vierer-Vektor ähnlich. Es handelt sich um einen Vierer-Pseudo-Vektor im erweiterten Spinor-Raum.

Der nächste logische Schritt, zur Invarianz unter beliebigen Koordinaten-Transformationen, könnte zu einer Art Tensor-Feldgleichung führen. Diese müsste dann kovariant und unabhängig von irgendwelchen Koordinaten formuliert sein. Allerdings ist unklar, wie sich der Wahrscheinlichkeits-Aspekt der Quantentheorie dann wandelt. Anders gefragt, was wird aus den Teilchen?

Ein anderer Aspekt scheint zudem die Relativitätstheorie als wichtiger oder tiefgründiger als die Quantentheorie darzustellen: Die SRT sagt aus, Masse und Energie sind äquivalent und ineinander wandelbar. Dies ist eine allgemeine Aussage. Erst dann kommt die Quantentheorie ins Spiel: aber nur, wenn die Quantenzahlen stimmen!

7 Bestätigen sich Aussagen bekannter Physiker?

Wenn sich das erarbeitete Programm bestätigt, könnte man seine wesentliche Essenz durch ein Zitat von William Clifford zusammenfassen (*On the Space-Theory of Matter,* Cambridge Philosophical Soc. (Vortrag am 21.2.1870)):
<<*Die Krümmung kleiner Raumgebiete setzt sich nach Art einer Welle fort. Diese Änderung in der Krümmung der Raums ist es, was wir die Bewegung der Materie nennen.*>>

Man muss diesen Satz nur etwas allgemeiner interpretieren (Raumzeit, nicht Raum allein!) und die Wirkungsquantisierung der Quantentheorie hinzufügen.

Damit wäre die Frage von Albert Einstein wahrscheinlich beantwortbar:

<<*Können wir den Materiebegriff nicht einfach fallenlassen und eine reine Feldphysik entwickeln?*>>

Die Antwort lautet: im Prinzip Ja! Was noch als Quelle (Materie) gesehen wird, ist, wenn sich gewisse Annahmen bestätigen, selbst eine Anregung der Raumzeit. Man kann diese als Innenfeld verstehen, welche das Außenfeld (Gravitation) ergänzt. Dass hierbei die ART grundlegend beibehalten wird, Einstein hiermit aber keinen Erfolg hatte, liegt nur in der Involvierung der Wirkungsquantisierung begründet.

8 Die nachträgliche Begründung des Einbringens der Plancklänge in die Energie-Gleichung für Gravitationswellen

Der Zusammenhang zwischen dem Viererweg-Element ds^2 und der Metrik $g_{u,v}$ erlaubt im Nachhinein die Quantisierung der Gravitationswellen sauber zu begründen.

Ein effektiver Weg durch eine gekrümmte Raumzeit ergibt sich erst durch die Integration der Metrik über einen Viererweg als Parameter.

Das würde in diesem Fall bedeuten, dass das Produkt der Energie-Flächendichte einer Gravitationswelle und der Planckfläche im Grunde auf das Viererweg-Integral über die metrische Störung zurückzuführen ist.

In gewissen Sinn wurde durch das Einbringen der Planckfläche die "falsche" Ableitung rückgängig gemacht, denn hier blieb die Amplitude h_{uv} erhalten. Und inklusive der Integration über die Krümmung entspricht das Integral der Metrik zu einem Quadrat des Vierer-Wegs insgesamt 2 von 3 Integrationen, welche, wie sich letztlich zeigen wird, zwischen Krümmung und Vierer-Weg liegen.

Es sollen wie bisher Schwachfeld-Lösungen wie die Gravitationswellen reproduziert werden. Dies bedingt, dass über sehr kleine metrische Felder integriert werden muss, was im ersten Moment mit der Quantisierung der Vierer-Wege zu kollidieren scheint. Dies lässt sich bereits anhand typischer Lorentz-Transformation verstehen. Um - nahezu - beliebige Geschwindigkeiten zu beschreiben bleibt es unvermeidbar partiell kleinere räumliche Abstände pro Planckzeit einzuführen. Man könnte z.B. ansetzen, dass nach fünf Planckzeiten eine Plancklänge zurückgelegt wird, was einem Fünftel der Lichtgeschwindigkeit entspricht.

Die Lorentz-Transformation ist im Allgemeinen noch problematischer. Das anschauliche Bild eines pseudo-euklidischen Gitters (!) ist nicht haltbar, da jeder Beobachter sein eigenes Schwerpunkt-System quantisiert sehen muss. Es ist vermutlich sinnvoller die Tensorstruktur der Metrik für die quantisierte Raumzeit als Bezugs-Mollusken - wie es Einstein einmal so treffend nannte - endlicher Größe zu interpretieren, deren "Haupt-Achsen" quantisiert erscheinen.

Der gefundene Zusammenhang zwischen Wirkung und Energie einerseits und Viererweg-Element und Metrik andererseits, führt zu der Annahme, dass die Anwendung der herkömmlichen Quantisierungs-Verfahren, auf Metrik, Krümmung oder Konnexion als Feldgrößen, von Grund auf von falschen Voraussetzungen ausgeht. Die Quantisierung definiert sich vielmehr über das Vierer-Weg-Element.

Damit lässt sich die allgemeinste mögliche Quantisierung des Gravitationsfeldes - das Vierervolumen-Integral über eine Energiedichte bzw. Krümmung oder auch die Einstein-Hilbert-Wirkung, die in den folgenden Abschnitten betrachtet werden - erst durch Aufsplittung wirklich verstehen: Umkehrung der zwei kovarianten Ableitungen plus Integration über Abstandsquadrate.

Die Metrik bleibt die zentrale Größe der Theorie aber erst ihre Integration führt zur eigentlichen Quantisierung.

Mit dem Ansatz, dass somit nunmehr nicht Flächen fixer Geometrie sondern viel allgemeiner die Quadrate von Abständen bestimmt werden, kann über die bisher nicht eindeutige Quantisierung hinaus gegangen werden. Mit der alten Annahme ließ sich z.B. die Polarisation einer Gravitationswelle nicht berücksichtigen. Dies ist nun über die Bestimmung der Abhängigkeit der Abstandsquadrate vom umlaufenden Winkel möglich. Dieser Grund-Ansatz sollte sich auf alle möglichen Lösungen der ART anwenden lassen!

9 Die Metrik und die Plancklänge – das Problem der Relativität in quantisierter Geometrie

Eine Grundannahme: Die Konstanz der Metrik über eine Plancklänge

Bei der Quantisierung der Gravitationswelle wurde kein Vierer-Weg-Integral angesetzt. Vielmehr ergab sich die Energie nahezu korrekt bereits über ein einfaches Produkt. Unter der Annahme, dass die Metrik über das Maß der Plancklänge eine konstante Größe sei.

Eine grundlegende Arbeitshypothese sei nun, dass diese Annahme allgemein zutrifft, wenn jeweils aus einem Schwerpunkt-System heraus argumentiert wird.

Dann könnte man annehmen, dass das Quadrat der Plancklänge $Lp^{(2)}_{u,v}$ die Metrik als Feldgröße im Rahmen der Quantenmechanik ersetzt. Das Quadrat, da die Metrikkomponenten im allgemeinen Quadrate von Dilatationen darstellen. Dies ist in erster Näherung sofern richtig, da die Metrik als relativer Ausdruck immer lokal normiert werden kann. dann ergibt sich

$$ds^2 = g_{u,v} * dx_u * dx_v = -1*c^2*dt^2 + 1*dx^2 + 1*dy^2 + 1*dz^2 \qquad (9.1)$$

mit der Plancklänge als Einträge eines nicht infinitesimalen, sondern endlichen Vierervektors L_u zu

$$Ds^2 = g_{u,v} * L_u * L_v \qquad (9.2)$$

Die Plancklänge sei hier zunächst einfach ein Maß für die Änderung einer Geometrie, sonst ergibt der Zusammenhang zum Energie-Impulsdichte-Tensor und damit zum Krümmungstensor keinen Sinn! Analog zu den $g_{u,v}$ ist $L^{(2)}_{u,v}$ als relative Größe zu sehen! Größere Abstände ergeben sich durch Summation der Größe $L^{(2)}_{u,v}$ in Pfadrichtung.

Wohlgemerkt benutze ich hier absichtlich nicht den Begriff der Fläche. Es geht zunächst nur um Pfade und Abstände. Es soll keine spezifische Flächenform ausgezeichnet sein. Diese soll sich vielmehr, wie aus der ART bereits bekannt, erst unter Betrachtung spezifischer Symmetrien ergeben.

Die Raumzeit wäre dann ganz allgemein über die Angabe von Pfaden quantisiert, welche Räume zwischen (als nulldimensional angenommenen) Schnittpunkten aufspannen.

Die neue Theorie soll alle Lösungsmengen der ART reproduzieren. Der Limes für schwache Felder und große Abstände ergibt sich ganz zwanglos aus dem Verhältnis der unglaublich kleinen Änderung eines Weges wenn zu einem bereits betrachteten Weg, sagen wir 1 Meter, eine Plancklänge hinzugefügt oder weggenommen wird.

Daraus ergeben sich sofort einige Vorteile und der Ansatz löst gewisse Unklarheiten und Paradoxien in der Formulierung sogenannter doppelt-speziellen Erweiterungen der SRT. Dasselbe Argument könnte auch das Nullresultat des GLAST-Experiments erklären und damit die Loop QGT widerlegen.

Es steht in jedem Fall in direktem Gegensatz zu Grundannahmen der Stringtheorien. Es kann unter den gegebenen Voraussetzungen keine Wellenlänge bzw. Anregungsform eines Strings geben, welche kleiner als die Plancklänge ist! Es kann auch kein geschlossener String von der Länge der Planck-Länge existieren. Strings sind im Grunde kleine „Raumfäden“, d.h. eindimensionale Räume. Diese sollen eine Ausdehnung von der Größe der Plancklänge haben und entsprechen damit Dimensionen mit hoher Krümmung. Angeregte Energien sind in Stringtheorien in direkter Linie immer Vielfache der Planck-Energie. Das ist mit dem neuen Ansatz prinzipiell nicht möglich.

Über Vierer-Größen ausgedrückt, lässt die Quantisierung der Raumzeit die Lichtgeschwindigkeit absolut invariant. Energie- bzw. Wellenlängen-Abhängigkeiten von c, wie sie in doppelt-relativistischen Theorien auftreten, werden vermieden. Das Null-Resultat des GLAST-Experiments, die absolute Phasengleichheit auch hochenergetischer Strahlung, könnte somit hier seine Begründung finden und gewisse Annahmen der Loop-Quantengravitation widerlegen. Dies selbst unter der Annahme stochastischer Fluktuationen der Raumzeit. Diese müssen vierdimensional aufgefasst werden!

10 Die Suche nach der quantisierten Tensorfeldgleichung

Eine erste Näherung und ihre Interpretation

Kann auf ein Quellenfeld verzichtet werden?

Die bisherige Betrachtung von Gravitationswellen scheint darauf hinzudeuten, dass die Quantenmechanik nur einen Spezialfall einer allgemeineren Theorie darstellt. Jedoch stellen Gravitationswellen ihrerseits nur eine sehr spezielle Lösung der Relativitäts-Theorie dar!

Die ART in ihrer allgemeinsten Form wiederum als Teiltheorie zu reproduzieren würde erfordern, dass insgesamt zu einer quantisierten Form einer Tensorfeldgleichung übergegangen werden muss. Gleichzeitig sollen die bisherigen Lösungen der ART ihre Gültigkeit behalten. Wie also kann die Wirkungsquantisierung eingebracht und gleichzeitig die Kernaussage der Relativitätstheorie erhalten werden?

Betrachten wir in erster Näherung die Einstein-Gleichung als Vierervolumendichte einer neuen Tensorfeldgleichung.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} * g_{\mu\nu} * R = \frac{8\pi\gamma}{c^4} * T_{\mu\nu} \tag{10.1}$$

Auf der Quell-Seite ergibt sich ein einfach interpretierbarer Ausdruck:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} * g_{\mu\nu} * R = \frac{8\pi\gamma}{c^3} * H_{\mu\nu} * \frac{1}{dx^4} \tag{10.2}$$

Aus dem Energie-Impuls-Dichte-Tensor wird ein Tensor, dessen Elemente Wirkungen entsprechen. Interpretiert man diese Elemente als Vielfache des Wirkungsquants, lässt sich dieses als Konstante aus dem Tensor ziehen. Damit ergibt sich automatisch das Quadrat der sogenannten Plancklänge als skalare Konstante, nur noch multipliziert mit einem Tensor.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} * g_{\mu\nu} * R = \frac{8\pi\gamma}{c^3} * H_{\mu\nu} * \frac{1}{dx^4} \tag{10.3}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} * g_{\mu\nu} * R = \frac{8\pi h\gamma}{c^3} * N_{\mu\nu} * \frac{1}{dx^4} \tag{10.4}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} * g_{\mu\nu} * R = \frac{16\pi^2\hbar\gamma}{c^3} * N_{\mu\nu} * \frac{1}{dx^4} \tag{10.5}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} * g_{\mu\nu} * R = 16\pi^2 * A_0 * N_{\mu\nu} * \frac{1}{dx^4} \tag{10.6}$$

Dessen Elemente sind in dieser Definition aber reine Zahlen, ganz im Sinne der Quantentheorie, Quantenzahlen für die Geometrie des Riemann-Raumes.

In der Einsteingleichung steht auf der linken Seite die Geometrie der Raumzeit und auf der rechten Seite, als Quellterm, der physikalische Energie-Impuls-Dichte-Tensor. Nunmehr steht auf beiden Seiten reine Geometrie! Und zwar Geometrie welche Wirkungen proportional ist. Man kann eigentlich nicht mehr unterscheiden was Quelle und was Feld ist.

Auch wenn diese erste Näherung noch unvollständig ist, kann damit zumindest eine wichtige Frage gestellt werden:

Brauchen wir noch ein Quellenfeld?

Oder ergeben sich alle Größen der Theorie aus der Geometrie, insbesondere die Größen Energie und Impuls? Geht man unter dieser Prämisse den üblichen Weg und definiert Symmetrien und Grenzbedingungen, bestimmt aber die Stärken von Konnexion und Krümmung rein aus quantenhaften Abfolgen der Geometrie, kann durchaus auf Werte für diese Größen geschlossen werden, anstatt sie vorauszusetzen.

Dies impliziert, dass aus der bisherigen Gleichung, in der zwischen Feld und Quelle unterschieden wird, eine Art Eigenwert-Gleichung wird.

Der nächste Schritt wäre nun, über die Vierervolumendichte zu integrieren.

Bevor wir diesen angehen, betrachten wir die Vor- und Nachteile die sich ergeben, wenn direkt mit dem eben definierten "Planck-Tensor" - statt mit der Metrik - als neuer Feldgröße gerechnet wird.

Im ersten Moment erscheint dies reizvoll.

Aus energetischer Sicht wäre nichts gegen einen "Planck-Tensor" einzuwenden. Diese Feldgröße wäre einer Wirkung proportional, ihre erste Ableitung einer Energie bzw. einem Vierer-Impuls.

Doch lässt sich die geometrische Seite des Einstein-Tensors nicht reproduzieren. Der "Planck-Tensor" passt nicht in die Definition, da er nicht einheitenlos ist.

Denn bereits in der ersten Ableitung, in der Konnexion, geht der metrische Tensor quadratisch ein.

$$\Gamma^k_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} * (\frac{d}{dx_\mu} * g_{ab....}) \tag{10.7}$$

Zudem ergibt sich der Flächentensor erst über ein vierfaches Integral, Metrik und Krümmung hängen über zweifache Integration zusammen.

Da der postulierte *Planck-Tensor* nicht direkt in die zu reformulierende Einstein-Gleichung eingehen kann, belassen wir daher die Metrik als zentrale Feldgröße, an der Einstein-Gleichung und ihrer Herleitung ändert sich damit im ersten Moment nichts.

Das führt zu der Frage, wie die Plancklänge mit der Krümmung zusammenhängt, sofern die Grundgleichung der ART im Kern gültig bleibt.

11 Die allgemeine Quantisierung auf Basis der Einstein-Hilbert-Wirkung

Es gibt bereits eine exakte Lösung für ein Vierervolumen-Integral über die Einstein-Gleichung:

die Einstein-Hilbert-Wirkung, die, zusammen mit der Lagrangedichte eines Materie-Feldes als zweite Lagrange-Dichte, für eine kanonische oder kovariante Quantisierung angesetzt werden kann.

Aber diese exakte Lösung enthält schon implizit die Planck-Fläche, auch wenn man es erst nach einer kleinen Umformung sieht:

$$S = \frac{1}{2} * \frac{c^3}{8\pi\gamma} * \int \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu}\right)} * R(g_{\mu\nu}) * dx^4 \tag{11.1}$$

S ist die Wirkung.

Dann ist

$$S * \gamma / c^3 = \frac{1}{2} * \frac{1}{8\pi} * \int \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu}\right)} * R(g_{\mu\nu}) * dx^4 \tag{11.2}$$

automatisch von der Einheit her eine Fläche oder besser gesagt ein Abstandsquadrat..

Das Variationsprinzip besagt nun, dass eine Feldfunktion einen extremalen Zustand annimmt, so dass die Variation ihrer Wirkung nach ihren Komponenten verschwindet. Speziell unter der Annahme, dass die Wirkung minimal wird, bedeutet dies für uns: Der Viererabstand zwischen zwei Ereignissen wird minimal, jedoch offensichtlich mindestens eine Plancklänge, wenn die Wirkung nun durch das Wirkungsquant ausgedrückt wird.

Dies bedingt im Umkehrschluss, dass Metrik, Konnexion und Krümmung keine beliebigen Werte annehmen können!

Die Hilbertsche Definition der Wirkung reicht also völlig aus, die Plancklänge in die Theorie zu implementieren. Sie ergibt sich auch hier automatisch und muss nicht künstlich in die Theorie eingebracht werden. Es muss nur die Wirkung S durch das Wirkungsquant ersetzt und zwei Konstanten müssen von der rechten Seite der Gleichung auf die linke übertragen werden.

Somit ergibt sich der Ausdruck

$$K * N * \hbar * \gamma / c^3 = \frac{1}{2} * \frac{1}{8\pi} * \int \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu}\right)} * R(g_{\mu\nu}) * dx^4 \tag{11.3}$$

also das Quadrat einer Länge auf der linken Seite der Gleichung und auf der rechten, wie zuvor, das Vierervolumenintegral über die Krümmung der Raumzeit. Offen bleibt im Moment nur die Frage nach dem exakten Betrag der sich hier ergebenden Länge, ausgedrückt durch den offenen Parameter K.

Ist es die Plancklänge oder die reduzierte Plancklänge und fehlt noch ein Vorfaktor?

12 Bestimmung der genauen Plancklänge anhand bekannter Theorie

Wie bei der Herleitung der Einstein-Gleichung der Gravitation betrachten wir zur Bestimmung der exakten Parameter bekannte Grenzfälle.

Zum ersten ergibt sich die Einstein-Gleichung durch Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung. Dabei steht der Faktor $\kappa=8\pi$ als Konstante, proportional auf der rechten Seite der Einstein-Gleichung und antiproportional 1/2k in der Einstein-Hilbert-Wirkung. Da wir später davon ausgehen, dass die Einstein-Gleichung im Kern unverändert gültig bleibt, kann dieser Faktor keinen Einfluss auf den Betrag der Plancklänge haben.

Bleibt die Frage, ob andere Vorfaktoren eine Rolle spielen und ob insbesondere das Plancksche Wirkungsquant oder dessen reduzierte Version einzusetzen ist.

Eine Argumentation orientiert sich an der Wellengleichung der Quantenmechanik. Hier ist es üblich, Winkelfrequenz und Wellenzahl in Berechnungen zu nutzen. In dem Moment muss das reduzierte Wirkungsquant zur Bestimmung von Energie und Impuls eines Quants eingesetzt werden.

In der so ähnlichen Energie-Funktion für lineare Gravitationswellen wurde aus demselben Grund die reduzierte Plancklänge als radialer Abmesser senkrecht zur Ausbreitungsrichtung angesetzt. Zusätzlich wurde aus Symmetrie-Gründen ein Vorfaktor π gesetzt.

Es könnte sich als vorteilhaft erweisen diesen Ansatz weiter zu verfolgen, indem je nach angesetzter Symmetrie die reduzierte Plancklänge mit unterschiedlichen Vorfaktoren zu verwenden ist. In drei Dimensionen und mit Punktsymmetrie eines Feldes wäre dies z.B. der Ausdruck 4 π * Plancklänge zum Quadrat um eine Hüllkurve zu beschreiben.

Eine andere Herleitung der Plancklänge bestimmt sich durch das Produkt des Schwarzschildradius einer Masse mit dessen Compton-Wellenlänge. Auch hier gibt es verschiedene Variationen. Diese unterscheiden sich maximal um einen Faktor $(4\pi)^{1/2}$.

In bekannten Arbeiten wird dieser jedoch meist unterschlagen, mit dem Vorwand, dass die Plancklänge doch nur eine ungefähre Grenze für die bekannte Physik darstelle.

Doch nun soll die Plancklänge essentieller Bestandteil einer Theorie werden, die Quantentheorie und Gravitation vereint.

Was bedeutet das Produkt dieser Größen?

Beide sind lediglich von einer Ruhmasse abhängig. Der Schwarzschildradius definiert sich über die Fläche des Ereignishorizontes um eine Singularität, die radial auslaufende Photonen nicht überwinden können. Er ist nicht der tatsächliche Abstand zur Singularität, denn dieser definiert sich erst über das Weg-Integral über die ortsabhängige Metrik. Doch dieses Integral kann über den Schwarzschildradius als Parameter gebildet werden.

Ausgehend von dieser Tatsache leitet sich die Planckfläche von dem reellen Flächeninhalt des Ereignishorizontes ab. Der Schwarzschild-Radius könnte allgemeiner als Parameter, denn als ein echter Abstand durch eine gekrümmte Raumzeit aufgefasst werden.

In der Schwarzschild-Lösung treten radiale Abstände dilatiert auf, tangentiale über eine punktsymmetrische Fläche nicht. Das bedeutet für unsere Interpretation der Plancklänge: sie müsste aufgrund dieser Ableitung ein echter Abstand in einem flachen Raum sein, allgemeiner aufgefasst jedoch ein Parameter zur Berechnung von Abständen über die Metrik eines gekrümmten Raumes.

Die Compton-Wellenlänge hingegen ist eine Größe zur Berechnung quantenmechanischer Vorgänge in einem flachen Hintergrundraum. Sie bestimmt den Energie- und Impuls-Übertrag bei der Streuung von Photonen an elektrisch geladenen Teilchen mit der Masse m. Sie hat mit Geometrie im ersten Moment nichts zu tun.

Für beide Größen kann nicht sicher gesagt werden, ob sie in Kombination den kleinstmöglichen Weg durch die Raumzeit ergeben.

Eine weitere Möglichkeit, die Größe der Plancklänge einzugrenzen, stellt ein besonders wichtiger Wert der Quantenfeld-Theorie dar: die dimensionslose Kopplungs-Konstante.

Unter der Voraussetzung, dass sich zwei Massen durch Bosonenaustausch anziehen und der jeweilige Impuls-Übertrag von Boson auf Ladung maximal, also gleich 1 ist, ergibt sich die Planckmasse als Grenzwert für die Anwendung der Quantenfeld-Theorie über

$$M_p^2 * c^4 = E_p^2 = \hbar * c^5/\gamma \tag{12.1}$$

und

$$E_p^2 = (\hbar * \mathrm{k} * \mathrm{c})^2 = \hbar^2 * \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} * \mathrm{c}^2 = \hbar^2 * \frac{1}{\mathrm{L}^2} * \mathrm{c}^2 \tag{12.2}$$

zu

$$\mathrm{L}^2 = \hbar * y/c^3 \tag{12.3}$$

Zwei Teilchen mit Planck-Masse ziehen sich gemäß der Quantentheorie mit derselben Kraft an, wie zwei Teilchen mit der elektrischen Planckladung. Dies korreliert mit der zweifach reduzierten Plancklänge.

Das bedeutet, sie bedingt sich aus der reduzierten Compton-Wellenlänge und dem Gravitations-Radius, nicht dem doppelt so großen Schwarzschildradius.

Das hier der Gravitations-Radius auftritt, nicht der Schwarzschildradius, kann auch damit zusammenhängen, dass letzterer sich bei maximal rotierenden schwarzen Löchern auf die Hälfte reduziert. Die aus dem Schwarzschildradius abgeleitete Plancklänge wäre aufgrund einer abweichenden Geometrie somit durchaus unterschreitbar.

Dies erlaubt, dass schwarze Löcher in einer Quantengravitation eine gewisse innere Struktur aufweisen könnten.

Ergänzung: Der Drehimpuls, welcher sich gerade aus dem Produkt von Plancklänge und Planck-Impuls ergibt, entspricht gerade dem Drehimpuls-Quant ħ. Auch dies spricht für die

Verwendung der reduzierten Plancklänge als kleinstem Abstand. Wir setzen also den bisher offenen Parameter K gleich Eins!

13 Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung unter Einhaltung einer Mindestlänge des Viererweges

Durch die Umstellung der Einstein-Hilbert-Wirkung taucht das Quadrat der Plancklänge als skalare Invariante in Erscheinung.

Die zentrale Aussage lautet nun, dass die Variation der Wirkung verschwindet. Dann ergeben sich wieder die einsteinschen Feldgleichungen. Es gibt bislang keinerlei physikalischen Hinweis für ein Abweichen vom Variationsprinzip, was Modifikationen der ART stark einschränkt.

Wenn also die Wirkung unter beliebigen Variationen der Metrik immer dieselbe ist, dann muss dies auch für die Plancklänge gelten. Diese müsste im Rahmen der ART als Eintrag eines Vierervektors behandelt werden, denn nur die Länge eines Viererwegs bleibt invariant. Und der Vierer-Vektor wird üblicherweise über die Metrik transformiert.

Dann muss weiterhin zugelassen werden, dass Anteile des transformierten Vierer-Vektors auch größer oder sogar kleiner als die Plancklänge sein können. Nur dann ist es möglich, dass die Plancklänge als kleinster vorstellbarer Abstand in vier Dimensionen invariant bleibt. Anders gesagt: auch bei Betrachtung von Plancklänge und Planck-Zeit dürfen Raum und Zeit nicht getrennt voneinander betrachtet werden.

Wenn die Pfade bzw. Parameter, über die der Raum durch Summation bestimmt wird, quantisiert sind, müssen es auch die Pfade sein, über die die Metrik abgeleitet wird. Anders ausgedrückt, rechnen wir in *beide Richtungen* in nur einem *Parameter-Raum*. D.h. die kovariante Ableitung muss für kleinste Abstände in eine Differenzen-Quotienten-Gleichung umformuliert werden.

Die Behandlung der Plancklänge als Eintrag eines Vierervektors erfordert, dass sie keine innere Struktur aufweisen kann. Nur wenn die erste und zweite kovariante Ableitung verschwinden, kann ein Vektor mit Null-Einträgen definiert werden. Schon der Begriff Vektor impliziert dies. Ein Vektor hat nur Richtung und Länge, keine höhere Struktur.

Dies kann als Bestätigung unserer Arbeitshypothese gelten, dass die Metrik über eine minimale Verschiebung eine Konstante ist!

Damit folgt, dass das Vierer-Integral über die Krümmung, die Einstein-Hilbert-Gleichung, nun in 2 Schritte aufgeteilt werden können müsste. Zwei Integrationen beheben die kovarianten Ableitungen der Metrik, die restlichen zwei definieren sich nun über das Pfadintegral über das quadratische Vierer-Wegelement. Zentrale Größe bleibt der Metrische Tensor.

Durch die bisherige Definition muss der quantisierte Vierer-Vektor im Allgemeinen begrenzt sein. Jeder Vektor-Eintrag kann nur 3 mögliche Werte annehmen: 0, -1 oder plus 1. Allerdings wäre die Zeit, ausgehend von der aktuellen Kosmologie, eine Ausnahme. Sie erscheint stets zukunftsgerichtet und hätte daher nur die Eigenwerte 0 und 1.

Wir können also von *Zustandsvektoren* mit *beschränktem Zustandsraum* sprechen.

Und die Planckländge ist im ersten Moment mathematisch wenig mehr als ein Parameter, der erst unter Zuhilfenahme der Zustandsvektoren einen reellen Abstand berechenbar macht. Erst diese Konstruktion erlaubt, einen gekrümmten Raum mit dem Prinzip der Quantisierung zu vereinbaren.

Damit können wir einen Schritt weitergehen und die Feldgleichungen betrachten.

Die Einstein-Hilbert-Wirkung unter Einbringung der Plancklänge lautet nun

$$n * \hbar = \frac{1}{2} * \frac{c^3}{8\pi\gamma} * \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} * R(g_{\mu\nu}) * s_0^4 \qquad (13.1)$$

Wobei der Ausdruck $n * \hbar$ faktisch die Forderung nach „ganzen Wirkungsquanten" repräsentiert.

Da wir hier mit festen Pfaden rechnen folgt weiterhin

$$n * \hbar = \frac{1}{2} * \frac{c^3}{8\pi\gamma} * \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} * R(g_{\mu\nu}) * \left(\frac{\hbar * \gamma}{c^3}\right)^2 \qquad (13.2)$$

$$\mathrm{n} = \frac{1}{2} * \frac{\hbar * \gamma}{8\pi c^3} * \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} * R(g_{\mu\nu}) * 1^4 \qquad (13.3)$$

für ganze n (Wirkungsquanten) und „Pfade" der Länge 1.

Die Einhaltung des bekannten Variationsprinzips führt automatisch zu den Feldgleichungen der ART.

Sichtbare Unterschiede ergeben sich erst bei Betrachtung sehr kleiner Abstände, die mit der Plancklänge vergleichbar sind oder bei sehr hohen Feldstärken!

Das vorläufige Korrespondenzprinzip lautet einfach:

$$\hbar \rightarrow 0 \qquad (13.4)$$

Insbesondere muss die kovariante Ableitung partiell für Abstände kleiner als die Plancklänge verschwinden:

$$s_k \leq s_0 \ \rightarrow \Gamma^k_{\mu\nu} \rightarrow 0 \tag{13.5}$$

$$s_k \leq s_0 \ \rightarrow R^k_{\mu\nu\alpha} \rightarrow 0 \tag{13.6}$$

$$\mathrm{n} = \frac{1}{2} * \frac{\hbar * \gamma}{8\pi c^3} * \int \sqrt{-\det{(g_{\mu\nu})}} * R(g_{\mu\nu}) * 1^4 \tag{13.7}$$

Da die Metrik generell normiert werden kann, und der Ausdruck ohnehin unter Variation der Metrik invariant ist, kann weiter vereinfacht werden.

$$\mathrm{n} = \frac{1}{2} * \frac{\hbar * \gamma}{8\pi c^3} * \int R(g_{\mu\nu}) * 1^4 \tag{13.8}$$

Allerdings bedeutet dies, dass n verschwindet, wenn der Krümmungs-Skalar verschwindet.

Dies kann nur auf eine Weise verstanden werden. Die Struktur der Minkowski-Raumzeit mag quantisiert sein, trägt aber hier nicht zur Wirkung bei. Dies macht auch Sinn. Abgesehen von echter intrinsischer Krümmung in Tensorform, sind alle weiteren Größen - Konnexion, Metrik und Wege abhängig vom verwendeten Koordinaten-System und fort-transformierbar.

Das bedeutet hier: die berechnete Wirkung repräsentiert die Zunahme eines Weges, in dem Moment, in dem die Geometrie von der flachen Raumzeit abweicht! Ein hypothetisches Test-Teilchen folgt einer Geodäte, die einen "Umweg" darstellt. Ein Weg S wird immer um dieselbe Abweichung ds proportional einer Wirkung zunehmen, wenn die Krümmung ungleich Null wird. Die Art der Abweichung hängt dann zusätzlich von der Art der Rand- und Nebenbedingungen ab, nicht jedoch ihr Betrag.

Da wir bereits festgestellt haben, dass die Metrik in gewisser Hinsicht nahezu beliebig klein werden muss, können wir hier noch einen Schritt weiter verallgemeinern.

Wenn wir Abschnitte von der Ausdehnung der Plancklänge zunächst als Tangential-Räume auffassen, ist die Metrik lokal über diese konstant und sie stellen das Pendant zu lokalen Inertial-Systemen dar. Darüber hinaus müssen diese Tangential-Räume nun im direkten Vergleich - über Differenzen-Quotienten, alle Größen der ART berechenbar machen.

Da die Metrik schon in erster Betrachtung nahezu beliebig schwach variieren können muss, gilt dies auch für Konnexion und Krümmung. Aber eben nur fast! Die begrenzende Größe ist das Vierer-Integral über die Krümmung. Wird die Wirkung als immer gleiche Größe, z.B. wie eine Amplitude, aufgefasst, sind Vierer-Volumen und Krümmung umgekehrt proportional!

Um einen Begriff zu definieren, der nicht mit der Metrik verwechselt werden kann, betrachten wir die Plancklänge als Abweichung von einer Minkowski-Metrik als *geodätische Störung* S_p.

Auf dieser Basis können nun der Quantisierungs-Regel genügende Teil-Formeln abgeleitet werden.

Formeln für Gravitationsfelder und ihre Ursachen, die nicht nur der Feldtheorie sondern auch der Quanten-Theorie gehorchen.

14 Die Wirkung als Feldgröße

Aufgrund der gefundenen Größe der geodätischen Störung als Maß für die Struktur der Raumzeit taucht hier die physikalische Wirkung S in gewisser Hinsicht als Feldgröße auf, denn sie ist eben durch den Zusammenhang mit der Raumzeit-Struktur überall definiert, nicht nur dort wo Teilchen beschrieben werden.

Unabhängig von der geometrischen Bedeutung könnte die Wirkung so gesehen auch als Skalar-Feld in der Raumzeit interpretiert werden.

$$S = const. \tag{14.1}$$

Solange keine Variation betrachtet wird, ist dieses Feld, genau wie eine Metrik oder Koordinate, physikalisch offensichtlich irrelevant.

Treten hingegen lokale Abweichungen auf, definieren diese über partielle Ableitung nach den möglichen Koordinaten ein Vektor-Feld!

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \vec{V} = \vec{I} \tag{14.2}$$

Dieses Vektor-Feld enthält direkt die Größen Energie und Impuls.

Ohne weitere Nebenbedingungen produziert es neben den in der Quantenphysik bekannten weitere Probleme.

Neben der Wirkung muss auch die Raumzeit quantisiert sein. Ansonsten reproduziert dieses allgemeine Vektor-Feld das Problem, dass beliebig hohe Energien als Ergebnisse auftreten können.

Wir reden hier zudem über Vierer-Skalare in einer vierdimensionalen Raumzeit.

Das heißt, die allgemeinste Form der Ableitung produziert Vierer-Vektoren.

$$\frac{\delta S}{\delta x_\mu} = I_\mu \text{ für } \mu \text{ von 0 bis 3} \tag{14.3}$$

Wird jedoch angenommen, dass dieser Vierer-Raum absolut symmetrisch sei, ist das Vektor-Feld ebenfalls symmetrisch in vier Dimensionen.

Die Unterscheidung der Zeit vom Raum muss also zusätzlich vorausgesetzt werden und ergibt sich zunächst nicht aus der Theorie. Das Problem tritt generell bei allen Feldtheorien insofern auf, dass diese, im Gegensatz zur Empirie, zeitsymmetrisch sind.

Eine vierdimensionale Symmetrie würde hier zusätzlich zu einem falschen Kraft-Gesetz führen.

$$\vec{F} = \frac{\hbar}{r^4} * \vec{r} \tag{14.4}$$

Zu guter Letzt wäre es nicht relevant ob alle Dimensionen reell oder imaginär wären. Statt einer stabilen Wellengleichung bekäme man immer eine mit exponentiell abklingenden Amplituden.

$$\frac{d^2}{c^2 * d_t^2} - \sum \frac{d^2}{d_x^2} = 0 \tag{14.5}$$

Mit g_{00}=1 und g_{rr}=1 folgt über

$$ds^2 = g_{\mu v} * dx^{\mu} * dx^{v} = 0 \tag{14.6}$$

für lichtartige Fortpflanzung eine imaginäre Frequenz mit reeller Wellenzahl oder umgekehrt eine reelle Frequenz mit imaginärer Wellenzahl. Die generelle Lösung mit imaginärer Frequenz lautet

$$F(t,r) = e^{i(\omega * t - k * r)} = e^{-\omega * t} * e^{i(-k * r)} \tag{14.7}$$

Da wir die Darstellung der Wirkung als Feldgröße aus der Geometrie abgeleitet haben, sollten wir sie und ihre Probleme dennoch im Hinterkopf behalten.

Denn kosmologische Konzepte inklusive des Anfangs des Universums hängen elementar mit der mathematischen Struktur der ART zusammen. Unser Verständnis des Urknalls muss daher revidiert werden, nachdem der Ursprung des Quantenprinzips in der Struktur der Raumzeit gefunden wurde.

15 Die allgemeine Quantisierung der Raumzeit

Die allgemeine Definition der geodätischen Störung ist zunächst unabhängig davon, welcher Entwicklung diese folgt und welche Symmetrien für die Beschreibung der Raumzeit zugrunde gelegt werden.

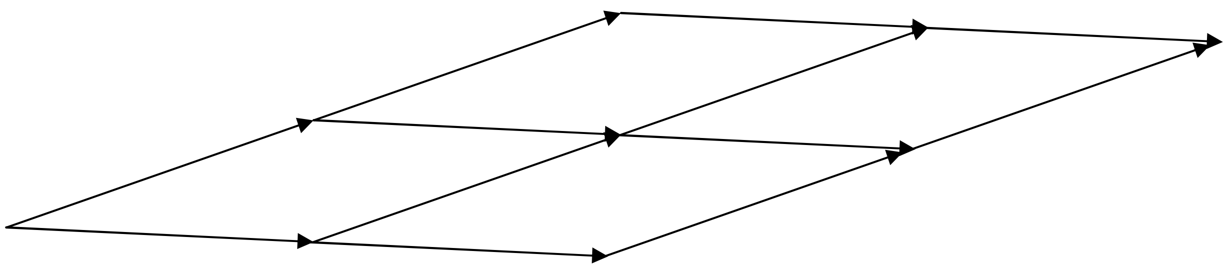
Sie ist offensichtlich allgemein gültig.

Die erste Lösung mit verschwindender Störung und damit verschwindender Krümmung muss dann die Minkowski-Raumzeit reproduzieren.

Das muss nicht heißen, dass diese nicht quantisiert erscheint.

Einfach ausgedrückt: Ein Abstand bzw. eine Länge kann unmöglich negativ sein. Das gilt getrennt für rein räumliche wie rein zeitliche Abstände. Allerdings bedingt dies auch, dass Geodäten durch beide allenfalls lichtartig ausfallen können.

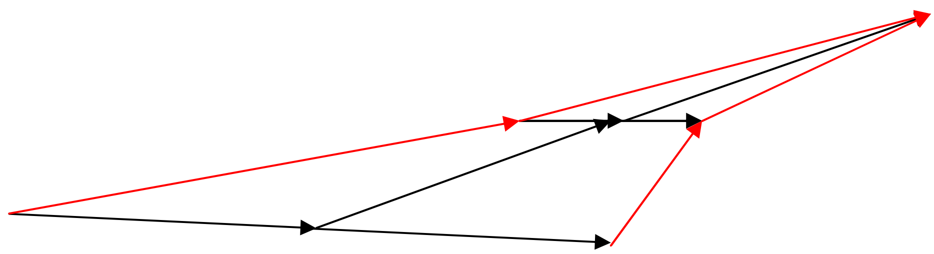
Formel...



Allgemeiner ausgedrückt, ist das Integral über die Krümmung positiv definit. Das Minimum der Wirkung kann minimal Null sein. Das hängt im Grunde nun damit zusammen, dass ein Vektor zwar invertiert betrachtet werden kann, seine Länge jedoch – sein absoluter Betrag - , unabhängig von irgendwelchen Konventionen, immer positiv ist. Eine negative Länge ist auch aus dem Gesichtspunkt nicht möglich.

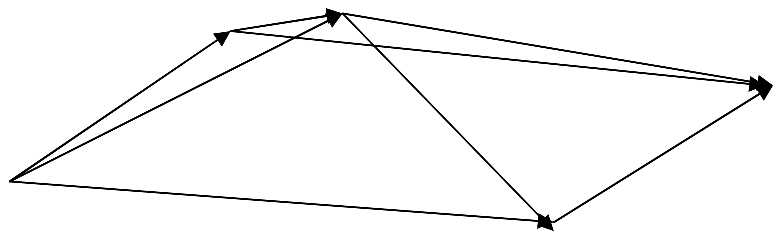
Die Anwendung der geodätischen Störung auf die Minkowski-Raumzeit erfordert also, dass diese ebenfalls auf Basis der Plancklänge quantisiert ist. Der Abstand zwischen zwei direkt benachbarten Punkten muss die Plancklänge sein.

In dem Moment reduziert die kleinste vorstellbare geodätische Störung den Abstand zwischen diesen Punkten minimal auf null.



Weiterhin hat die Wirkung bestimmte Eigenschaften: Sie ist invariant unter beliebigen Koordinaten-Transformationen. Sie ist nach allen bisherigen Erkenntnissen stationär: die zugrunde liegende Feldfunktion der ART stellt sich extremal ein. Insbesondere minimal. Der einzige Unterschied zur konventionellen Sichtweise: Das Minimum kann nicht mehr beliebige Werte annehmen, sondern ändert sich schrittweise mindestens um das Wirkungsquant.

Da weiterhin die Plancklänge als Eintrag eines Vierer-Vektors auftritt, kann die Krümmung eines Pfades und die Krümmung der Raumzeit erst bestimmt werden, wenn nicht kolineare Vektoren verglichen werden. Es braucht mindestens zwei Vektoren die einen Winkel einschließen, um eine Pfadkrümmung zu definieren. Um eine echte intrinsische Krümmung zu bestimmen braucht es in zwei Dimensionen vier Vektoren und in höheren Dimensionen der Zahl N ganz allgemein 2N Vektoren.



Was bedeutet das physikalisch?

Angenommen, ein ideales Punktteilchen läuft entlang eines Pfades, der nur einer Plancklänge entspricht. Dann bedingt die Konstanz der Metrik über eine Plancklänge, dass der Vierer-Impuls des Teilchens konstant bleibt. Erst der Übergang über mindestens zwei derartige Abschnitte unterschiedlicher Metrik bewirkt eine Impuls-Änderung.

Die Strukturlosigkeit über eine einzige Plancklänge lässt diese physikalisch irrelevant. Sie korrespondiert mit der Energie-Impuls-Erhaltung bei einer reinen Koordinaten-Verschiebung, die ja auch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs sein könnte.

Die Relation von mindestens 2 Abschnitten bedingt eine Impuls-Änderung und muss somit das Maß der Konnexion bestimmen.

Erst der Vergleich von nichtparallelen Pfaden ergibt die intrinsische Krümmung der Raumzeit.

16 Rechnungen mit quantenhaften Stufen der Geometrie

Der Vektor dx_u ist zunächst nur ein Parameter um überhaupt etwas berechnen zu können. Für gewöhnlich werden die Metrik-Komponenten zwar durch Koordinaten parametrisiert, aber diese sind mit den tatsächlichen Koordinaten im Allgemeinen nicht identisch. Nur bei sehr schwachen, bzw. verschwindenden Krümmungen der Raumzeit sind *Parameter-Raum* und *Raumzeit* identisch! Diese Begriffe sollten wir uns merken! Diese Unterscheidung wird bei der weiteren Interpretation der Plancklänge noch ein wichtiger Punkt sein. Im Fall der Minkowski-Metrik und in einem Schwerpunkt-System kann der *Parameter-Raum* direkt mit der physikalischen Raumzeit identifiziert werden.

Die Plancklänge als Vierer-Weg ist kein rein räumlich nicht unterschreitbarer Abstand, wie in doppelt-speziellen Erweiterungen der SRT angenommen. In solchen Theorien ergeben sich Paradoxien, z.B. ist ein Proton je nach Beobachter plötzlich ein schwarzes Loch. Hier ist die Plancklänge vielmehr eine relativistische Invariante, d.h. ein Viererabstand zwischen zwei Ereignissen. Raum- und Zeitabstände hingegen erscheinen jeweils für sich, wie in der klassischen Theorie, dilatiert. Und das im ursprünglichen Sinn der SRT: beobachterabhängig. Wie die Anteile erscheinen, soll ganz allgemein relativ bleiben.

Es gibt noch ein Argument dafür, die Plancklänge als invarianten Viererabstand anzunehmen: Sie berechnet sich aus drei Naturkonstanten, die jede für sich Vierer-Invarianten sind! Warum sollte ihre Kombination es auf einmal nicht sein?

Nun ist ein bestimmter Abstand, quadriert, einer Wirkung proportional. Dann ist eine raumzeitliche Variation, ausgedrückt durch veränderliche Metrik-Komponenten, auch einem quantisierten Energie-Impuls-Tensor proportional, wenn die Komponenten auf die invariante Plancklänge partiell angewandt werden.

Diese Anwendung der Plancklänge entspricht der Definition eines Viererweges über die Metrik.

Allerdings bedingt sie ein Problem, das im ersten Moment mit der Quantenmechanik unvereinbar scheint: die Quantisierung verbindet gravitative Änderungen mit Energien, nicht Energie-Dichten. Das Integral über größere Abstände ist eine beliebig große Energie. Das Problem wird in einem späteren Kapitel erörtert.

17 Krümmung der Raumzeit und Pfade

Die minimale geodätische Störung als Amplitude

Wir haben bereits festgestellt, dass die Planck-Länge, wie ein Pfad im Allgemeinen, nicht direkt einem metrischen Zustand entspricht. Sie ist als Integral über ein metrisches Feld aufzufassen.

Wenn die Metrik global konstant ist, kann man allenfalls aussagen, dass eine Eigenzeit (oder -Länge) direkt quantisiert erscheint. Dies führt zu folgender Forderung:

Ist eine Eigenzeit, wie im klassischen Fall, gegenüber Drehung und Lorentz-Transformation invariant, müssen über kleinste Abstände auch Abweichungen betrachtet werden, welche kleiner als eine Plancklänge erscheinen. Rechnet man von einem neuen Bezugs-System aus, hat man automatisch wieder einen direkt quantisierten Entwicklungsparameter, die Eigenzeit des neuen Systems, über den diese Abweichungen passend integriert werden können. Da die Eigenzeit, der *Laufparameter*, quantisiert ist, ist es streng genommen eine Summation. Ein Beispiel hier wäre eine sehr einfache Definition einer Geschwindigkeit:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1 * s_0}{n_t * t_0} = \frac{1 * c * t_0}{n * t_0} = \frac{c}{n} \qquad (17.1)$$

$$\beta = \frac{1}{n_t} \qquad (17.2)$$

Auf die Lorentz-Transformation soll hier nicht weiter eingegangen werden. Es ist aber sehr leicht einzusehen, dass hier der Faktor β, multipliziert mit der passenden Länge der Eigenzeit im Beobachter-System, diesen gerade ausgleicht. Würde man nun Umkehrungen hinzufügen, hätte man faktisch eine alternierende Funktion, bei der ein Testteilchen abwechselnd nach links und nach rechts, um die Eigenzeit als Symmetrie-Achse pendelt. Dann träte die Plancklänge praktisch als Amplitude auf.

Lässt sich dieser Umstand verallgemeinern?

Da ein unbeschleunigtes Teilchen gerade der Krümmung der Raumzeit folgt, muss die Struktur der Raumzeit von der eben betrachteten Minkowski-Metrik abweichen. In dem Moment hat jedes Teilchen, unabhängig von seiner Masse, nach einem ungestörten freien Fall und relativ zu einem bestimmten Koordinaten-System eine genau definierte Geschwindigkeit.

Damit lässt sich eine Metrik beschreiben! Die Geodäte selbst ist jedoch über das Vierer-Weg-Integral über die Metrik definiert! Die neu definierte Größe, die geodätischen Störung S_p, kann somit z.B. als Amplitude einer wellenartigen Geodäte aufgefasst werden! Das hängt von der betrachteten Lösung ab.

Wir haben bereits festgestellt, dass die allgemeinste Darstellung der geodätischen Störung unabhängig von irgendwelchen Symmetrien ist. Diese können, wie in der ART üblich, für die Erarbeitung spezifischer Lösungen eingebracht werden.

Zum Einstand betrachten wir Gravitationswellen unter dem Gesichtspunkt der quantisierten geodätischen Störung!

18 Gravitationswellen aus neuer Sichtweise -

Elementarer Zusammenhang von Energie und Freiheitsgraden

Das bisher erarbeitete Konzept lässt die mathematische Struktur der ART in dem Sinne unangetastet, dass für den Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ diese uneingeschränkt gilt. Umgekehrt müssen nur hinreichend große Abstände betrachtet werden um die ART zu reproduzieren $dx/X = h/S \approx 0$!

Das bedeutet, wir können die bekannten Lösungen im Prinzip mit geringen Modifikationen weiter betrachten. Die erste Einschränkung betrifft die Weg-Länge. Wie weit weicht ein Weg durch eine gekrümmte Raumzeit ab, wenn dieser im ungekrümmten Fall die Länge S_z aufweist? Dies ist die einfachste Frage, die an die Theorie gestellt werden kann.

Nach der Einschränkung der Einstein-Hilbert-Wirkung muss gerade diese Abweichung quantisiert erscheinen. Und zwar unabhängig von der exakten Lösung, insbesondere von Symmetrie-Forderungen. Weiterhin ist diese Abweichung eine invariante Größe, muss also aus beliebigen Koordinaten-Systemen betrachtet immer dieselbe sein.

Die zweite Einschränkung betrifft die Frage nach einem Entwicklungs-Parameter als beschreibender Größe. Für gewöhnlich wird von einer Eigenzeit oder den Koordinaten eines „ungestörten Beobachters" ausgegangen. Dies sind nicht die einzigen, aber die einfachsten beschreibenden Parameter.

Diese müssen im Allgemeinen nun ebenfalls quantisiert erscheinen. Allerdings zeigt sich hierbei, dass Variationen für gewöhnlich derart schwach ausfallen, dass diese Quantisierung nicht in Erscheinung tritt.

Die erste Anwendung soll unser Verständnis der Gravitationswellen neu bewerten.

Wir stellen die Frage: wie ändert sich das Verhalten von Gravitationswellen? Sind sie quantisiert? Welche Struktur ist dem Tensor-Boson zu Eigen?

Gravitationswellen sind eine Schwach-Feld-Lösung. In dieser Lösung treten sehr geringe Schwingungen der räumlichen Anteile des Metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ auf. Diese Störungen werden von einer Hintergrund-Metrik $n_{\mu\nu}$ abgespalten als Stör-Term $h_{\mu\nu}$ geschrieben:

$$g_{\mu\nu}(\vec{r},t) = n_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{r},t) \tag{18.1}$$

Aufgrund der Eichinvarianz sind Gravitationswellen Transversal-Wellen. Das heißt es werden zwei Metrische Komponenten in Abhängigkeit einer Koordinate z und der Zeit t betrachtet, die aufgrund der Schwäche der Störung als unbeeinflusst aufgefasst werden. Es treten dabei verschiedene Transversal-Moden auf.

$$h_{\mu\nu}(z,t) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & -h_{11} \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{18.2}$$

Das heißt, Gravitationswellen weisen zwei unabhängige Komponenten in der Amplitude auf.

Unsere neue Zwangsbedingung sagt nun aus, dass das Wegintegral über eine beliebig symmetrische metrische Funktion immer dieselbe geodätische Störung S_p ergeben muss. Die nunmehr auftretenden Amplituden sind durch die Quantisierungsregel und die Nebenbedingung, dass Längen nicht negativ ausfallen können, eindeutig. Da hier als Entwicklung eine lineare Wellenfunktion vorliegt, ist das Integral für eine ausgezeichnete Richtung in der Schwingungs-Ebene ebenso eindeutig bestimmt.

Da die geodätische Störung ein Skalar ist, ist die Stammfunktion zunächst ebenfalls skalar.

$$S(t,z) = \mathrm{S}_p * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \mathrm{S}_p * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{18.3}$$

Die einfache partielle Ableitung, nicht als Feld sondern als Eigenwert aufgefasst, ergibt denselben Zusammenhang zwischen Energie, Impuls und Wirkung wie in der Quantenmechanik. Dies ist automatisch gegeben, da die geodätische Störung sich von der Wirkung nur durch zwei Naturkonstanten unterscheidet: c und ɤ. Die Ableitung nach der Zeit ist dann eine eindeutige Energie, nach den räumlichen Koordinaten ein Impuls-Vektor.

$$E = \hbar * \omega \tag{18.4}$$

$$\vec{p} = \hbar * \vec{\mathrm{k}} \tag{18.5}$$

Vom Ausgangspunkt der veränderlichen Geometrie aus betrachtet stellt es sich anders dar.

Wir betrachten eine symmetrische Anregung der Raumzeit. Das heißt, die geodätische Störung ergibt sich über verschiedene Pfade aber zum selben Betrag. Und es die Größe einer Transversal-Welle. Die erste Näherung hierzu wäre ein Vektor-Feld von mindestens zwei gekoppelten, senkrecht zueinander stehenden Schwingungen. Dazu muss eine Vektor-Basis definiert werden.

Wenn eine Basis von drei senkrecht aufeinander stehenden Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{\mathrm{e}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{e}_2} = \overrightarrow{\mathrm{e}_3} \tag{18.6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{e}_1} * \overrightarrow{\mathrm{e}_2} = 0 \tag{18.7}$$

gegeben ist und die dritte Richtung die Ausbreitungs-Richtung angibt, können zwei Schwingungs-Richtungen definiert und auch voneinander unterschieden werden.

$$\vec{E} = S_1(t,z) = \mathrm{S}_p * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) * \overrightarrow{\mathrm{e}_1} \tag{18.8}$$

$$\vec{B} = S_2(t,z) = \mathrm{S}_p * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) * \overrightarrow{\mathrm{e}_2} \tag{18.9}$$

Allerdings sind diese zwei Vektor-Felder gekoppelt, zudem im Falle von Gravitationswellen zueinander phasenverschoben. Erst in Tensor-Schreibweise lässt sich das Feld vollständig beschreiben.

Die zwei unabhängigen Amplituden, die Freiheitsgrade, des metrischen Tensors können nicht mehr verschieden voneinander sein, wenn sie sich letztlich über die Ableitung derselben geodätischen Störung als Amplitude und der einzigen Wellenfunktion bestimmen. Die einzige Größe, die die metrischen Elongationen dann noch voneinander verschieden machen kann ist eine Phasenverschiebung, allgemeiner ein Phasenfaktor, die wir hier vorerst als Vektor-Basis behandeln.

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = S_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) * \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_2 \end{pmatrix} \tag{18.10}$$

Um das Verhalten von Gravitationswellen ganz zu reproduzieren, muss ein Element der Vektor-Basis also negativ sein, so dass das Feld nicht mehr völlig rotations-invariant ist. In dem Moment ergibt sich eine variable Radialkomponente. Das Feld wird symmetrisch unter 180 Grad-Drehungen und repräsentiert so bereits das Spin-2–Verhalten für Gravitationswellen.

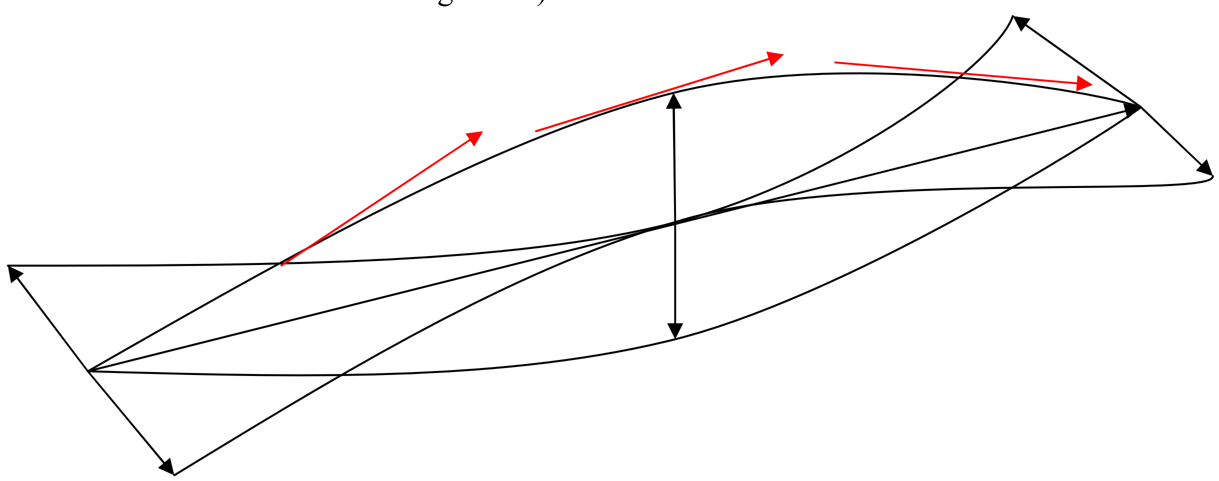
$$S_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.11}$$

Die erste Ableitung der tensoriellen Funktion muss wieder den Größen Energie und Impuls proportional sein. Allerdings betrachten wir reelle geometrische Größen. Dass hier die Wellenfunktion in der eulerschen Form geschrieben wird, hat mit der Quantenmechanik zunächst nichts zu tun. Daher ergeben sich veränderliche Größen, für die die eben genannten Eigenwerte nur die positiven Extrema darstellen:

$$\dot{S_{\mu\nu}} = \mathrm{S}_p * \omega * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.12}$$

$$S'_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * |\vec{\mathrm{k}}| * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.13}$$

In einfachster Form betrachten wir bei jeder Ableitung Tangenten an die Stammfunktion. Deren Beträge werden in herkömmlicher Darstellung wieder zu skalaren Amplituden der abgeleiteten Funktion. (Dies ist erst dann nicht mehr haltbar, wenn die Quantisierung der Parameter t und z berücksichtigt wird.)



Wir haben hier vier gekoppelte Wellengleichungen, deren gemeinsame Anteile aus dem Tensor herausgezogen wurden.

Unabhängig von Phasenverschiebung und Polarisation müsste diese Funktion als Entität bestimmter Energie aufgefasst werden, die nur von der Frequenz abhängt. Denn aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass eine Wellenfunktion bekannter Frequenz, unabhängig von den Teilchen die da beschrieben werden, immer auf dieselbe Energie führt.

Dieser Zusammenhang erzwingt hier, das Skalar des Energie-Tensors auf seinen Wert zu prüfen. Weicht sie vom bekannten Zusammenhang ab, fehlt noch ein Normierungsfaktor.

Die geodätische Störung entspricht direkt der physikalischen Wirkung:

$$H_{\mu\nu} = \hbar * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \hbar * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{18.14}$$

Die Ableitung nach der Zeit führt direkt zu einer Energie-Größe, die Ableitung nach z muss zunächst nicht zwingend betrachtet werden.

$$E_{\mu\nu} = \hbar * \omega * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{f}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \hbar * \omega * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{18.15}$$

Analog zur Quantenmechanik kann nun einfach die Energie als Eigenwert betrachtet werden.

Dann ist

$$E_{\mu\nu} * g^{\mu\nu} = \mathrm{E}_{\nu}^{\mu} = \hbar * \omega * \varphi_{\nu}^{\mu} \tag{18.16}$$

Das Skalar der Energie ist dann

$$E = \pm\sqrt{\textstyle\sum_1^2 \mathrm{E}_{\nu}^{\mu}} = \pm\sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \pm\,\hbar * \omega * \sqrt{1^2 + (-1)^2} \tag{18.17}$$

$$\pm E = \hbar * \omega * \sqrt{2} \tag{18.18}$$

Das Ergebnis bedingt eine Normierung der Wellenfunktion um den Faktor Wurzel von Ein halb.

$$S_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{2}} * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{18.19}$$

Das Ergebnis passt sehr gut zu der Annahme, dass Lösungen der quantisierten ART von den zugrundegelegten Symmetriebedingungen abhängen sollen. Normierungsfaktoren hängen in den meisten Fällen mit der Anzahl der Dimensionen zusammen, die jenen Raum oder Unterraum bilden, in denen eine spezifische Lösung symmetrisch ist. In der ART bedingt dies zum Beispiel den Betrag der skalaren Krümmung am Ereignishorizont eines Schwarzen Loches. In Theorien wie der statistischen Thermodynamik folgt ein ähnlicher Zusammenhang aus der Anzahl der Freiheitsgrade.

So gesehen war das Ergebnis absehbar, da bei Gravitationswellen nur zwei linear unabhängige Metrik-Komponenten vorausgesetzt werden. Im Gegensatz zu klassischen

Theorien wird jetzt jedoch davon ausgegangen, dass die Anzahl der Freiheitsgrade die Größe von Energie und Impuls eines elementaren Vorganges im Sinne einer Ein-Teilchen-Lösung nicht ändert. Dies korreliert mit der Erkenntnis, dass der grundlegende Zusammenhang von Energie und Frequenz immer derselbe ist, egal ob Fermionen oder Bosonen untersucht werden.

$$\pm E = \hbar * \omega \tag{18.20}$$

Nun wurden im Ergebnis die möglichen Vorzeichen der Energie nicht unterdrückt, was vor der Entwicklung der Dirac-Gleichung noch als unphysikalisch galt. Soweit müssen wir in der Argumentation jetzt noch nicht gehen. Da hier ein lichtschneller Vorgang ohne Ruhemasse betrachtet wird und somit Frequenz und Wellenzahl direkt zusammenhängen, entspricht die Energie dem reinen Impuls.

$$\pm E = \pm\hbar * |\vec{\mathrm{k}}| * \mathrm{c} = \pm p * c \tag{18.21}$$

Wir könne das Vorzeichen wahlweise auf die Ausbreitungs-Richtung oder den Wellenzahl-Vektor übertragen.

19 Die elementare Beschränkung des metrischen Feldes bei Quantisierung der Wellenlänge

Mit der geodätischen Störung als immer gleicher Amplitude einer Wellenfunktion bleibt nur noch die Wellenlänge, um die Metrische Störung zu bestimmen.

$$S_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{2}} * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{19.1}$$

Die Metrik ergibt sich hier sowohl aus der zweifachen Ableitung nach der Ausbreitungsrichtung, als auch als lokale Störung, nur in Abhängigkeit von der Zeit.

$$\frac{d^2}{dz^2} S_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{2}} * \varphi_{\mu\nu} * (-\mathrm{k})^2 * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{h} * \frac{1}{\sqrt{2}} * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{19.2}$$

$$\frac{d^2}{c^2 * dt^2} S_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{2}} * \varphi_{\mu\nu} * \left(\frac{\omega}{\mathrm{c}}\right)^2 * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{h} * \frac{1}{\sqrt{2}} * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{19.3}$$

(Der Zusammenhang ist letztlich dem Umstand geschuldet, dass hier das metrische Feld – also die Raumzeit – eine Koppelung von lokalen Oszillationen zu Wellen entspricht, die nur Zustände transportieren, besonders Energie. Dies wird noch ein wichtiger Aspekt beim weiteren Vergleich mit nichtlokalen Aspekten der Quantenmechanik.)

Das Maximum der skalaren metrischen Störung bei bekannter Wellenlänge beträgt dann

$$\widehat{h_{11}} = \widehat{h_{22}} = \mathrm{S}_p * \mathrm{k}^2 = \mathrm{L}_\mathrm{p}^2 * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{19.4}$$

Wir reden hier von der Störung $h_{\mu\nu}$, die klassisch sehr schwach angesetzt wird. Wir können nun untersuchen, wie groß $h_{\mu\nu}$ wird und wann Komponenten der Metrik $g_{\mu\nu}$ für einen externen Beobachter singulär werden, d.h. aus seiner Sicht lichtartig. Das muss nicht mit der ursprünglichen Definition der Wellenfunktion kollidieren, denn letztlich kann man den Entwicklungsparameter z auch als Eigenzeit des Vorganges auffassen. Dann werden Komponenten der Metrik die „parallel" zu z sind um das Maß maximal reduziert, um das die Störung in XY zunimmt. Das wäre unabhängig von der Polarisation:

$$g - h = 1 - \mathrm{S}_p * \mathrm{k}^2 = 1 - \mathrm{L}_\mathrm{p}^2 * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{19.5}$$

Wann wird h=1?

$$\lambda = 2\pi * \mathrm{L}_\mathrm{p} \tag{19.6}$$

Das bedeutet, die Störung kann in dieser Näherung nur lichtartige Geodäten ergeben, wenn die Wellenlänge tatsächlich der nichtreduzierten Plancklänge entspricht, welche in der ursprünglichen Herleitung der Plancklänge der Compton-Wellenlänge eines Teilchens entspricht.

Prinzipiell könnte man den Zusammenhang zwischen Lichtartigkeit und Wellenlänge in die Formel für den Gravitations-Radius einsetzen, da der generelle Zusammenhang offensichtlich nicht von Symmetrie-Bedingungen abhängt. Dann wäre h als eine allgemeine Störung „senkrecht" zu einer Eigenzeit-Achse zu sehen.

Mit

$$h = \frac{\varphi}{\mathrm{c}^2} = \mathrm{L}_\mathrm{p}^2 * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{19.7}$$

$$\varphi = \mathrm{c}^2 * \mathrm{L}_\mathrm{p}^2 * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 * \mathrm{L}_\mathrm{p}^2 \tag{19.8}$$

$$\varphi = \gamma * \mathrm{M}/\mathrm{r} = \gamma * \hbar * \omega \ \ /\mathrm{r} \tag{19.9}$$

$$\mathrm{r} = \gamma * \hbar * \omega \ \ /(\mathrm{c}^2 * \varphi) \tag{19.10}$$

$$\mathrm{r} = \gamma * \hbar * \omega \ \ /\left(\mathrm{c}^2 * \omega^2 * \mathrm{L}_\mathrm{p}^2\right) \tag{19.11}$$

$$\mathrm{r} = \gamma * \hbar * \omega \ \ /(\mathrm{c}^2 * \omega^2 * \hbar * \gamma/\mathrm{c}^3) \tag{19.12}$$

$$\mathrm{r} = \mathrm{c}/\omega \tag{19.13}$$

$$r = c * T_0 * 2\pi * n/(2\pi) = c * T_0 * n = L_p * n \tag{19.14}$$

Ein Ereignis-Horizont definiert sich darüber, dass Licht gerade nicht entkommen kann.

Der Gravitations-Radius ist so betrachtet nur dann *reell*, wenn er mindestens der Plancklänge oder einem ganzzahligen Vielfachen davon entspricht. Doch für jede Wellenlänge, die größer ist als die Plancklänge, ist die metrische Störung aufgrund der Quantisierung der Raumzeit begrenzt und kleiner als eins! Elementarste Anregungen der Raumzeit bedingen aufgrund der abgeleiteten Quantisierung nur dann lichtartige Wege für ein hypothetisches Test-Teilchen, wenn eine Störung der Raumzeit gewissermaßen an die Grenze ihrer „Auflösung“ stößt. In dem Moment ist ein Lichtweg von der Art „eine Plancklänge pro Planckzeit“.

Doch diese Näherung berücksichtigt die Quantisierung noch nicht vollständig, da für allerkleinste Abstände zu einer Differenzen-Quotienten-Geometrie übergegangen werden muss. Der berechnete Radius ist nicht der Schwarzschild-Radius, sondern der Gravitations-Radius. Für die weiteren Betrachtungen reicht die Näherung hingegen aus.

Wie groß wird h bei Größenordnungen quantenmechanischer Vorgänge?

Eine erste Schätzung über die Compton-Wellenlänge des Elektrons ergibt

$$\lambda_e \approx 10^{-12}\mathrm{m} \tag{19.15}$$

$$h = L_p^2 * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \approx 10^{-70+1+24} \approx 10^{-45} \tag{19.16}$$

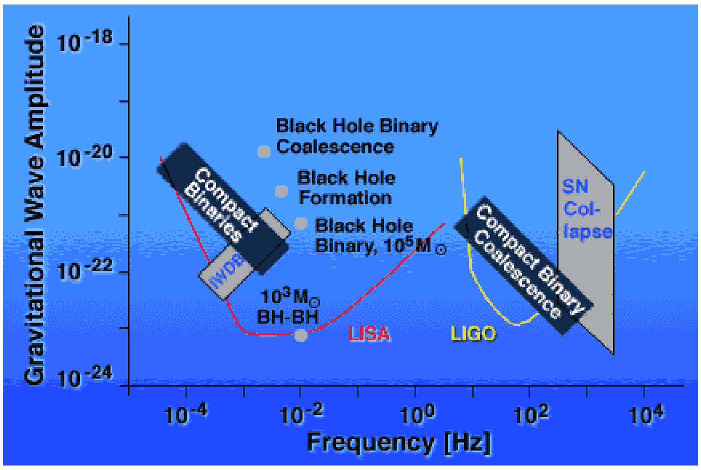
Selbst mit den höchsten erreichbaren Energien von Beschleunigern ist man weit von relativistischen Bereichen entfernt:

$$E = 10 \quad \mathrm{TeV} \approx 10^{-6} J \tag{19.17}$$

$$\lambda \;= {}^{h * c}/_{E} \approx 10^{-33+8+6}\mathrm{m} \approx 10^{-19}\mathrm{m} \tag{19.18}$$

$$h \approx 10^{-70+1+38} \approx 10^{-31} \tag{19.19}$$

Wie groß wird h im Spektral-Bereich messbarer Gravitationswellen?



(http://www.geo600.uni-hannover.de/physikjahr/gwspektrum.html)

Im Spektralbereich der für Gravitationswellen gemeinhin angenommen wird, lassen sich metrische Störungen bestimmen, die weit geringer sind als aus Modellen, etwa für Kollapse schwarzer Löcher, errechnet werden und auch genau so gemessen wurden. Für Störungen wie sie von makroskopischen Vorgängen aus gehen, sind kontinuierliche Rechnungen unglaublich genau.

$$\lambda_{\text{gw}} \approx 10^4 \,..\, 10^{12}\ \text{m} \tag{19.20}$$

Es lässt sich ein Vergleich anstellen zwischen diesen gemessenen Amplituden der Metrik und jenen, die sich elementar aus der Wellenlänge errechnen lassen. Dieser Vergleich kann als die Suche nach dem Tensor-Boson, dem Graviton, verstanden werden, ist jedoch nicht allgemeingültig!

$$h_{gemessen} \approx 10^{-24}..10^{-18} \tag{19.21}$$

$$h(\lambda_{\text{gw}}) = 10^{-70+1-(4..12)} \approx 10^{-73}..10^{-81} \tag{19.22}$$

$$\overline{h_{gemessen}}/h(\overline{\lambda_{\text{gw}}}) \approx 10^{-21+75} \approx 10^{54} \tag{19.23}$$

(Umgerechnet Krümmung zu Energiedichte zu Energieflußdichte: 10 Watt/m^2) ???

Das heißt, die gemessenen Amplituden, die gerade einmal ein Tausendstel eines Protondurchmessers über Kilometer Mess-Strecke hinweg verändern, wirken wie ein Fluss von größenordnungsmäßig 10^{54} Gravitonen, sofern diese Interpretation der Gleichung zulässig ist!

20 Das Tensor-Boson

Eine erste Verbindung zwischen Geometrie und Teilchenzuständen

Welche Struktur ist dem Tensor-Boson nun zu Eigen? Bei der Definition der Energie wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Energie der quantisierten Gravitations-Welle wie in der Quantenmechanik eindeutig über die Energie-Frequenz-Relation bestimmt ist. In Feldtheorien ist dies normalerweise nicht gegeben, was in der weiteren Argumentation noch näher erläutert wird.

Diese Energie wird nun als Energie eines Teilchens aufgefasst, hier eben des Tensor-Bosons, dem Graviton. Weiter wurde der Zusammenhang zwischen Gravitations-Radius und verursachender Energie über die das Maximum der metrischen Störung definiert. Doch tatsächlich haben wir eine dynamische Metrik, während das Feld eines Teilchens normalerweise als statisch angenommen wird, wie zum Beispiel bei der Schwarzschild-Metrik.

Im direkten Vergleich müsste das Boson über die lokale Störung der Geometrie definiert sein, gewissermaßen einen winzigen Ausschnitt der Welle darstellen. Dies kann im ersten Moment nur verstanden werden, wenn man die Extrema der Wellenfunktion betrachtet. Nur hier sind die bisher identifizierten Zustände definiert.

Dann ist das Tensor-Boson ein Teilchen mit der Energie $\hbar * \omega$, dessen metrisches Feld einem magnetischen Feld in gewisser Weise ähnlich sein muss: maximal senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und gegen Null strebend in Ausbreitungsrichtung. Das Gravitationsfeld wäre identisch zu dem zu einer bestimmten Zeit oder an einem bestimmten Ort definierten Wellenfeld, also das zweikomponentige, rein räumliche Metrik-Feld, das symmetrisch unter 180° ist und linear oder elliptisch polarisiert sein kann. Daher spricht man vom Tensor-Boson und Spin 2.

Weiter sollte das Feld in der Polarisations-Ebene in eindeutiger Weise abfallen.

Der Feldaspekt ist vorerst von geringerer Bedeutung.

Interessanter ist, dass der Zusammenhang zwischen der Energie $\hbar * \omega$ und dem Feld nur am Maximum der Wellenfunktion eindeutig zu sein scheint, in der Art, dass diese Energie als Quelle eines statischen Feldes auftritt.

Hier muss erstmals der Aspekt aus der Quantenmechanik bemüht werden, dass die quantenmechanische Wellenfunktion Teilchen-Eigenschaften als *Überlagerung* trägt und nur *Wahrscheinlichkeitsaussagen* dafür liefert, welche Eigenschaft gemessen werden kann.

Im vorliegenden Fall ergibt dies einen ganz neuen Aspekt für Eigenschaften der Raumzeit selbst!

Eine Gravitationswelle ist dynamisch und alterniert zwischen zwei Extrema. Wenn wir das Wellenfeld wieder als dynamische Überlagerung auffassen würden, wäre es eine Linear-Kombination der extremalen geometrischen Störungen der Raumzeit!

Die Aussage wäre dann: wo und wann realisiert sich eine bestimmte geometrische Struktur der Raumzeit selbst? Diese Frage ist jetzt von eminenter Wichtigkeit, denn sie bedingt einen direkten Zusammenhang zum Wahrscheinlichkeits-Aspekt und so seltsamen Voraussagen der Quantenmechanik wie dem Einstein-Podolski-Rosen-Paradoxon.

21 Angeregte Zustände der Raumzeit im Sinne der Quantenmechanik

Wie schon erörtert, sind Gravitations-Wellen eigentlich Schwachfeld-Lösungen. Dennoch konnte in den vorigen Kapiteln durchaus auf die Grenzen des Modells und dem Übergang zum nächsten hingewiesen werden. Was die Frage aufwirft, was die Bildung von Unendlichkeits-Stellen tatsächlich vermeidet.

Nun haben wir die geodätische Störung als exaktes Maß für die Quantisierung der Raumzeit und die Bedingung, dass negative Abstände unmöglich erscheinen. Angewandt auf eine Wellenfunktion ergibt dies sinnvolle Lösungen. Doch warum?

Die geodätische Störung S_p ist identisch mit einem angeregten Zustand vom Betrag $\hbar$.

Gemäß der Quanten-Mechanik tendieren angeregte Zustände immer dazu, den in einem System kleinstmöglichen Wert anzunehmen.

Diese Grundregel, angewandt auf die Raumzeit, ergibt ein schlüssiges Bild. Wieder betrachten wir die einfachste Lösung, in der die kleinste Abweichung von der Minkowski-Metrik auftritt.

Hier tritt die geodätische Störung in vollkommener Analogie als angeregter Zustand auf. Angenommen, auch sie tendiert dazu ein Minimum anzustreben – was jetzt mit der glatten Minkowski-Raumzeit und damit mit verschwindender Krümmung identisch ist – dann muss sie sich mit zunehmender, weil hier kontinuierlicher, Elongation selbst hemmen. Mathematisch ausgedrückt, muss ihre Schnelle gegen Null tendieren und sich dann umkehren.

Nun sind Wellengleichungen bereits Lösungen der ART. Der Gültigkeitsbereich wurde nur erweitert. Andere Teil-Lösungen könnten auf dieser Basis Singularitäten vermeiden. Doch hierzu müssen in einem erweiterten Modell die Interaktionen verschiedener elementarer Anregungen der Raumzeit bzw. das Verhalten in die Theorie gegebener Materie-Verteilungen betrachtet werden.

Begrenzt die elementare Quantisierung die Dichte, die eine Masse annehmen kann? Diese Frage wird später wieder aufgegriffen. Zunächst soll ein Modell für *vierdimensionale Materie-Wellen* aufgestellt werden.

22 Die Raumzeit und der harmonische Oszillator

Aus der formalen Ähnlichkeit der Energie-Gleichung für Gravitations-Wellen und der Wellenfunktion der Quantenmechanik wurde auf fundamentale quantenhafte Eigenschaften der Raumzeit geschlossen und im Umkehrschluss auf gravitative Eigenschaften der Wellenfunktion der Quantenmechanik, wenn ein direkter Vergleich bemüht wird.

Energetisch sind beide Lösungen vollkommen gleichwertig.

Der Unterschied liegt in erster Linie in der Interpretation von *Art* und *Einheit* der Elongation.

In der Quantenmechanik ist diese keine reelle Größe. Lediglich das Betragsquadrat der Wellenfunktion ist ein Maß für eine Wahrscheinlichkeitsdichte, zum Beispiel für die Aufenthalts-Wahrscheinlichkeit eines beschriebenen Teilchens.

Anders verhält es sich mit Wellengleichungen für physikalische, weitreichende Felder:

1) Im Gültigkeitsbereich linearer, homogener Wellengleichungen treten immer symmetrische Elongationen auf. Folge: die Welle des Feldes hat keine divergierende Eigenschaft im Sinne einer Ladung.
   - ➔ Testteilchen weichen nur vorübergehend von ihrer Ruhelage ab, nur bei effektiver Koppelung (wie z.b. Stromkreis im EM-Wellenfeld) wird Energie übertragen
   - ➔ Das bedeutet für Gravitationswellen: es tritt kein effektives Fernfeld in Erscheinung. Soweit kein direkter Impuls-Übertrag stattfindet, ist das effektive Feld im raumzeitlichen Mittel Null.
   - ➔ Die Wellenfunkion definiert Pfade die gerade um Beträge der Plancklänge geändert werden. Schon im Bereich von Elementarteilchen ($>10^{-19}$m) muss die damit verbundene Gravitations-Störung um viele Zehnerpotenzen abgefallen sein. Ein Wirkungs-Querschnitt muss mit der Planckfläche korrelieren.
   - ➔ Wenn dies allgemein für jede Lösung von der Art einer homogenen Wellengleichung gilt, ist auch das Fernfeld der noch zu entwickelnden linearen, ungestörten *Materie-Welle* effektiv Null. Da die Quantenmechanik nur mit Wellenfunktionen agiert, kann, Identität der Grundfunktionen vorausgesetzt, die sogenannte Vakuum-Energie nicht langreichweitig gravitativ wechselwirken.

2) Aus 1 kann gefolgert werden, dass die quantenmechanische Wellenfunktion im Grunde das neutrale Element zwischen den Zuständen von Materie und Antimaterie ist, ähnlich wie es eine elektromagnetische Welle für die möglichen Zustände elektrischer Ladung ist. Sie beschreibt im ersten Moment ausschließlich die *mechanischen* Eigenschaften von Elementarteilchen, im Prinzip somit deren *Gravitation*.

Gravitations-Wellen sind eine Folge der Koppelung der metrischen Eigenschaften der Raumzeit. Lokale Störungen beeinflussen verzögert ihr Umfeld und übertragen so Energie. Die Verzögerung zwischen zwei Punkten im Raum entspricht gerade einer Phasenverschiebung aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit. Die Raumzeit stellt in diesem Sinne ein Feld mit physikalischen Eigenschaften dar. In der herkömmlichen, kontinuierlichen Sichtweise ergibt sich der Energie-Übertrag zu

$$\vec{I} = |t_{\mu\nu}| * \vec{c} \tag{22.1}$$

Mit

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi\gamma} * k_\mu * k_\nu * (h_{11}^2 + h_{12}^2) \tag{22.2}$$

Unter Berücksichtigung der abgeleiteten Quantisierung der Geometrie folgt jedoch für eine lokale Oszillation, also für die Ableitung nach der Zeit für eine bestimmte räumliche Koordinate die Energie

$$E = \hbar * \omega \tag{22.3}$$

Durch die Ableitung nach den räumlichen Koordinaten ergibt sich ebenso ein Impuls

$$\vec{p} = \hbar * \vec{\mathrm{k}} \tag{22.4}$$

In der Quantenmechanik werden diese Werte als Zustände von Teilchen aufgefasst, deren Entwicklung über die quantenmechanische Wellenfunktion durchaus deterministisch und kausal beschrieben wird. Das heißt, eigentlich evolviert die Wellenfunktion dergestalt. Das damit beschriebene Teilchen erscheint hingegen zufällig und in mancher Hinsicht scheinbar instantan!

Aus geometrischer Sicht ergibt sich ein ganz neuer Blickwinkel.

Die quantisierte Raumzeit stellt sich nun als Feld unendlich vieler lokaler Oszillatoren dar. Doch diese Oszillatoren stehen nicht für sich selbst, sondern sind in fester Reihenfolge miteinander gekoppelt. Das Feld, also die Raumzeit, ist so gesehen ein unzerreißbares, quasi-kontinuierliches Gewebe mit kausaler Entwicklung, welche lokale Eigenschaften transportieren kann.

Die lokal definierte Energie E überträgt sich durch den Raum mit Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich der Zusammenhang

$$E = \vec{\mathrm{p}} * \vec{\mathrm{c}} \tag{22.5}$$

Für ein Quanten-Feld konstanter Energie, also überall gleicher Frequenz stellt sich das so dar, dass alle Oszillatoren einerseits dieselbe Grundschwingung durchführen und andererseits der Impuls, als Energie-Austausch beschrieben, unabhängig von Ort und Zeit unter diesen Bedingungen überall derselbe sein muss. Dann ist

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dt} * \vec{\mathrm{c}} = \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dx} * \mathrm{c}^2 \tag{22.6}$$

eine Kontinuitätsgleichung für das quantenmechanische Feld bei halbklassischer Beschreibung.

Daraus folgt jedoch ein neuer Ansatz zur Interpretation des Welle-Teilchen-Dualismus und der quantenmechanischen Unschärfe-Relation!

23 Ganz einfach zusammengefasst: Das Teilchen ist schon da!!

Das Feld - die Raumzeit – ist überall. Lokale Oszillationen seiner Struktur tragen Energie. Die Koppelung dieser Oszillationen bedingt einen Impuls, ausgedrückt durch Energietransport.

Wenn aber alle metrischen Oszillationen aufgrund konstanter Frequenz alle dieselbe Energie repräsentieren, kann damit die Ortsunschärfe ganz neu gesehen werden. Das Teilchen ist nunmehr keine selbständige Entität in der Raumzeit, sondern ein Zustand. Eine Messung oder Störung bedingt keinen Transport von Energie an eine bestimmte Stelle. Schon gar keinen instantanen Vorgang der Energie oder Impuls in irgendeiner Weise verschiebt.

Energie ist in diesem Zusammenhang im Grunde eine Feldgröße und der Teilchenbegriff im ersten Moment nicht anwendbar. Im Grunde müsste man sagen, wenn schon Teilchen definiert sind, dann sind sie durch das Feld allein repräsentiert. Und Felder sind keine lokalen sondern ausgedehnte Strukturen, so dass die prinzipielle Unschärfe vollkommen durch die Geometrie erklärt werden kann.

Bisher wurde allerdings nur halbklassisch argumentiert und der Wahrscheinlichkeits-Aspekt außen vor gelassen. Wenn der Impuls durch den Energietransport aufgrund der Koppelung lokaler Oszillatoren dargestellt wird, dann muss ein Teilchen der Energie E durch die lokale Struktur der Raumzeit repräsentiert sein, die an einem bestimmten Ort X_μ zu einer bestimmten Zeit t vorliegt.

Nun durchläuft die reelle Schwingung jedoch alle Zustände die durch Phase und die Ableitungen der Wellenfunktion definiert sind, auch neutrale und negative.

Wie schon beim Tensor-Boson muss Teilchen-Aspekt, Erwartungs-Zustand und Wahrscheinlichkeit herangezogen werden.

Die Raumzeit nimmt verschiedene, nahezu kontinuierliche Zustände an, auch solche die, im quantenmechanischen Sinn, nicht ganzen Wirkungsquanten proportional erscheinen.

Wenn die jeweiligen Extrema Erwartungszuständen entsprechen und Zwischenwerte als Überlagerungs-Zustände interpretiert werden, kann die Wellenfunktion voll quantenmechanisch auch als Wahrscheinlichkeitsfeld dargestellt werden.

24 Der quantenmechanische Messprozess

Für eine ausgedehnte, ungestörte, linear propagierende Welle ist der Hamiltonoperator wie bisher einfach durch die zeitliche Ableitung bestimmt.

$$E\,\Psi = \widehat{\mathrm{H}}\,\Psi \tag{24.1}$$

Doch unter den neuen Gesichtspunkten ist Gravitation nicht einfach ein Feld, dass nach bekannten Verfahren der Quantenfeld-Theorie umformuliert werden muss. Vielmehr definiert es eine tiefergehende Begründung der Quantenmechanik. Immerhin kann aus analogen Gründen für kleinste Störungen der Raumzeit anhand der Wellenfunktion der Aspekt der Wahrscheinlichkeit auf die Struktur der Raumzeit angewandt werden. Doch hierzu müssen neben den ersten Ableitungen nach den Koordinaten insgesamt bis zu vier Ableitungen berücksichtigt werden!

Wir haben nun klassisch argumentiert, dass Impuls sich durch einen Zustands-Transport ergibt. Außerdem, dass die Struktur der Raumzeit im gesamten Gebiet des Wellenfeldes, den Teilchenbegriff als lokale Struktur repräsentiert. Alle lokalen Schwingungen konstanter Frequenz repräsentieren dieselbe Energie.

Eine Störung der Welle an einem Ort erzwingt somit keinen Transport.

Aber die geometrische Sichtweise bietet eine Erklärung, warum die Information über den Impuls verlorengeht.

Die Störung bedeutet, dass der Energietransport an der Stelle der Messung effektiv unterbrochen wird. Die Energie wird von einem zweiten Teilchen absorbiert oder gestreut.

Was diese Sichtweise nicht erklären kann, ist die globale Dekohärenz.

Wenn die Welle an einer Stelle gestört wird, baut sie sich nicht, wie man klassisch erwarten würde, mit maximal Lichtgeschwindigkeit ab. Sie bricht überall gleichzeitig zusammen. Zudem kann nicht erklärt werden, welcher Zustand sich am Ort der Messung tatsächlich einstellt. Die Energie ist zwar überall dieselbe, aber der phasenbedingte Zustand der Welle nimmt zufällig einen von zumeist zwei definierten möglichen Zuständen an. Im Fall von Gravitonen könnte dies zum Beispiel die Richtung des Spin sein oder der geometrisch bedingte Aspekt der Metrik. Nur der Betrag ist eindeutig bestimmt.

Noch eklatanter wird dieses Problem wenn eine Verschränkung vorliegt. Immerhin kann die geometrische Sicht wieder soweit wie bisher angewandt werden. Denn verschränkte Teilchen werden von nur einer Wellenfunktion beschrieben!

Es darf aber auch nicht vergessen werden, dass die Wellenfunktion für die Entwicklung der Raumzeit nur eine mögliche Lösung von vielen ist. Die Metrik kann oszillieren oder ganz anderen Funktionen folgen, je nach betrachteten Nebenbedingungen und Symmetrien!

25 Die Kopplungskonstante der gravitativen Wechselwirkung

Die fundamental abgeleitete maximale metrische Störung ist tatsächlich vom Betrag identisch zur Kopplungskonstanten der Gravitation, welche in der Quantenmechanik analog zur Wechselwirkungsstärke der Quantenelektrodynamik definiert wird

$$\hat{h} = S_p * k^2 = \mathrm{L}_\mathrm{p}^2 * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \tag{25.1}$$

Mit

$$m = \frac{E}{c^2} = (\hbar * \mathrm{k})/c \tag{25.2}$$

$$k = (\mathrm{m} * \mathrm{c})/\hbar \tag{25.3}$$

Folgt

$$\hat{h} = S_p * \left(\frac{m*c}{\hbar}\right)^2 = \frac{\hbar*\gamma*\mathrm{m}^2*\mathrm{c}^2}{c^3*\hbar^2} = \frac{\gamma*\mathrm{m}^2}{\hbar*\mathrm{c}} \tag{25.4}$$

$$\hat{h} = \alpha(m) \tag{25.5}$$

Damit ist die Wechselwirkungsrate automatisch begrenzt, denn das absolute Maximum der metrischen Störung bedingt sich über die fundamentale Quantisierung der Raumzeit auf Basis der Plancklänge. Wenn die kleinstmögliche Wellenlänge vorliegt ist die elementare Störung maximal vom Betrag Eins.

26 Unstetigkeit der Raumzeit bei höchsten Energien

Gemäß Gleichung 19.6 wird eine metrische Störung nur dann lichtartig, wenn eine Wellenlänge die Größe der nichtreduzierten Plancklänge erreicht. Doch dies passt nicht so recht zu der Annahme, dass unterhalb einer Plancklänge (oder -Zeit) keine Struktur mehr definiert ist, in diesem Falle, keine phasenbedingte Variation irgendeiner Art. Dies ist sicherlich darauf zurück zu führen, dass der Ansatz der Differentiation bis zum Extrem angewandt wurde. Dieser ist bestimmt für hinreichend große Abstände, hier Wellenlängen, sinnvoll, führt jedoch zu falschen Verhältnissen, wenn allerkleinste Abstände und damit höchste Energien in Betracht gezogen werden.

Entweder wird ein Differenzen-Quotienten-Theorem benötigt oder man muss davon ausgehen, dass alle Zustände, die für gewöhnlich phasenabhängig beschrieben werden, als quantenmechanische Überlagerung innerhalb einer Planck-Einheit vorliegen. Letzterer Fall würde zum Beispiel bedeuten, dass jeder „Punkt“ in der Raumzeit gleichzeitig alle Energien, Metriken, Konnexionen und Krümmungen repräsentiert. Dann wären nur noch Wahrscheinlichkeiten berechenbar.

Um den bisherigen Ansatz der geometrisch induzierten Wellen-Physik hier weiter zu führen, muss das Theorem der Differential-Geometrie in eine Differenzen-Quotienten-Geometrie umgeschrieben werden.

Auf beiden Hypothesen aufbauend wird abschließend ein Experiment vorgeschlagen, um die Theorie im Allgemeinen und die zwei Subthesen im Besonderen falsifizierbar zu machen!

Grundlegend müssen nun Vierer-Vektoren endlicher Länge miteinander verglichen werden, die einen Kontaktpunkt gemeinsam haben. Für kleinste Abstände wird die Raumzeit also unstetig. Punkte lassen sich nur als Kontaktpunkte von Vierer-Vektoren idealisieren. In einem gekrümmten Raum wird die Ableitung um einen solchen Punkt X_μ im Allgemeinen nicht symmetrisch

$$f'(x - dx) \neq f'(x + dx) \tag{26.1}$$

Nur die Vektoren sind eindeutig und symmetrisch unter Inversion der Ableitungs-Richtung

$$f'(x_0 + dx) = f'(x_1 - dx) \tag{26.2}$$

wenn

$$x_1 = x_0 + dx \tag{26.3}$$

Tangenten sind nicht definierbar, bzw. unendlich für $dx \rightarrow 0$.

Der Begriff des Tangentialraums müsste ersetzt werden durch etwas, was man Sekantial-Raum nennen könnte, in jeder Richtung von der Ausdehnung der Plancklänge ist und nunmehr das kleinste vorstellbare Inertialsystem realisiert. Allerdings ist die Vorstellung eines dehnbaren pseudo-euklidischen Gitters wie bereits angedeutet nicht unproblematisch und nur als Rechenhilfe aufzufassen.

Lichtartigkeit definiert sich dann darüber, dass ein Vierer-Vektor zwei Einträge gleichen Betrages aufweist, die relativ zu einem System von Basis-Vektoren parallel beobachtet werden. Erst über kovariante Ableitung wird diese Betrachtung in koordinaten-unabhängige Form gebracht.

Um einen Kontaktpunkt von Vektoren kann allenfalls noch ein Mittelwert für abgeleitete Größen bestimmt werden, wenn die Ableitung symmetrisch geschrieben wird

$$f'(x_0) = (f(x_0 + dx) - f(x_0 - dx))/(2dx) \tag{26.4}$$

Dieser würde für hinreichend große Abstände bzw. schwache Variationen zunehmend in eine Differentialgleichung übergehen

$$dx \rightarrow 0 \text{ oder } f(x_0 + dx) - f(x_0 - dx) \ll 1 \tag{26.5}$$

Wie der allgemeinste Fall über die kovariante Ableitung sich exakt ergibt ist nicht so einfach abzuleiten. Es handelt sich hier um zehn nichtlineare, gekoppelte Differential-Gleichungen, die empfindlich von ihren Rand-, Symmetrie- und Startbedingungen abhängen. Nur allereinfachste Fälle sind geschlossen lösbar, andere nur numerisch.

An der Stelle wären Annäherungen mit den Gitter-Approximationen der Eichfeldtheorie vorstellbar. Bei gegebenen Bedingungen müsste die Komplexität schrittweise erhöht werden. Allerdings agiert bekannte Physik in Regionen, die dafür viel zu groß ausfallen. Zum Beispiel verhält sich die reduzierte Compton-Wellenlänge des Elektrons zur Plancklänge wie $1:10^{22}$, was sich auch in der Schwäche seiner gravitativen Wechselwirkungsstärke manifestiert.

Aus dem Grunde war der Differential-Kalkül bisher anwendbar. Es soll nun indirekt für die spezielle lineare Wellen-Gleichung auf die Supra-Feinstruktur seines Spektrums auf Basis der Plancklänge geschlossen werden.

Die höchste metrische Störung definiert sich als lichtartiger Vektor in einem pseudo-Euklidischen Gitter als Hilfs-Konstruktion. Sie bestimmt sich, wenn minimale und maximale geodätische Störung nur eine Plancklänge oder –Zeit auseinander liegen. Dann verzerrt sich ein damit gekoppelter zeitartiger Vektor

$$V_\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26.6}$$

zu einem lichtartigen

$$\acute{V}_\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \tag{26.7}$$

Weiterhin Periodizität zu fordern erzwingt, dass die kleinste vorstellbare Periodendauer das Vierfache der Planckzeit bzw. -Länge darstellt. Eine stehende Welle könnte auch über das zweifache definiert sein, hat aber immer noch eine zeitliche Periodizität von vierfacher Länge. Damit wäre die Grenze des Modells bereits bei einem Viertel der Planck-Energie erreicht.

Allerdings sind alle bisher als stetig aufgefasste Größen nur mehr als eine Art Erwartungs-Wert bzw. quasi-stetige Approximation definierbar, ev. über die Definition von Krümmungsradien, die über Koordinaten-Schnitte von paarweise senkrecht zu den Sekanten stehenden Vektoren bestimmt werden müssten.

Im vorliegenden Fall bestimmt die erste Quantisierung gewissermaßen wie die Phase "aufgelöst" wird. Es ist möglich, weil die Definition der geodätischen Störung als transversale Größe auf die Ableitungsrichtung bezogen als Skalar auftritt, auch wenn sie eigentlich die Quadrat-Länge eines Vierer-Vektors darstellt. Sie zieht zwei Kontakt-Punkte zusammen oder dilatiert den Abstand dazwischen. Diese Elongation ist proportional einer Phase und nur über die Kontaktpunkte definiert. Also muss die Phase hier quantisiert sein.

$$d\varphi \rightarrow 2\pi/n \tag{26.8}$$

Dann kann eine Periodizität allerdings nur gesichert werden, wenn diese Auflösung der Phase symmetrisch ausfällt.

Unter Asymmetrie erreichen Elongationen entweder nicht periodisch ihre Nullpunkte oder ihre Extrema, was theoretisch die Wellenfunktion unterbricht.

Nullpunkte werden erreicht unter

$$n * \pi = 0,1,2..n * \pi \tag{26.9}$$

Extrema werden erreicht unter

$$n * \pi/2 = 1,3,5,7..n * \pi/2 \tag{26.10}$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$n * \pi/2 = 0,1,2,3,..n * \pi/2 \tag{26.11}$$

pro Halbwelle ergibt sich ein Faktor 2, das heißt für eine Vollwelle der Faktor 4.

Auf der Basis wären nur Wellenlängen ganzzahliger Werte der vierfachen Plancklänge erlaubt und die Grenze des Modells bei einem Viertel der Planck-Energie erreicht.

Doch die dabei erreichten Vierer-Vektoren wären für n=1*4 bereits lichtartig, was auf eine falsche Annahme des Modells für höchste Energien hinweist.

27 Super-Feinstruktur des linearen Spektrums

Auf dieser Basis natürlicher Zahlen lässt sich eine Super-Feinstruktur des Spektrums der linearen Wellen-Funktion exemplarisch ableiten. Dies wäre prinzipiell eine messbare Größe um die Theorie im Allgemeinen und die Sub-These über die Feinstruktur im Besonderen zu falsifizieren.

Jeder Übergang zwischen erlaubten Grundschwingungen dürfte wieder nur ganz bestimmte Wellenlängen bzw. Energien aufweisen

Wenn

$$E(n) = \hbar * \omega = \hbar * (2\pi/2\pi * \mathrm{T_p} * \mathrm{n} * 4) \tag{27.1}$$

Ist der kleinste Unterschied dn*4=4, dann ist eine Energiedifferenz

$$E(n_2) - E(n_1) = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \left(\frac{1}{\mathrm{n_2}} - \frac{1}{\mathrm{n_1}}\right) = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \frac{1}{\mathrm{n_3}} \tag{27.2}$$

$$E(n_1 + 1) - E(n_1) = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \left(\frac{1}{\mathrm{n_1} + 1} - \frac{1}{\mathrm{n_1}}\right) \tag{27.3}$$

$$\varepsilon(n) = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \left(\frac{\mathrm{n} - \mathrm{n} - 1}{\mathrm{n} * (\mathrm{n} \quad + 1)}\right) \tag{27.4}$$

$$\varepsilon(n) = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \left(\frac{-1}{\mathrm{n}^2 + \mathrm{n}}\right) \tag{27.5}$$

Unter Vorgabe einer messbaren Energiedifferenz kann die benötigte Grundschwingung bestimmt werden zu

$$\mathrm{n}^2 + \mathrm{n} = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \frac{1}{\varepsilon} \tag{27.6}$$

$$\left(\mathrm{n} \quad + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4} \tag{27.7}$$

$$\mathrm{n} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4}} \tag{27.8}$$

n wird naturgemäß sehr groß für heutzutage erreichbare Energien, so dass einige Konstanten vernachlässigbar werden.

$$\mathrm{n} \approx \sqrt{\frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p}} * \frac{1}{\varepsilon}} \tag{27.9}$$

$$\mathrm{n} \approx \sqrt{\frac{\hbar * c}{4 * \mathrm{L_p} * \mathrm{e_0}} * \frac{1}{\varepsilon_{ev}}} \tag{27.10}$$

wenn

$$\mathrm{E_{ev}(n)} = \frac{\hbar * c}{4 * L_p * e_0}\sqrt{\frac{4 * L_p * e_0}{\hbar * c} * \varepsilon_{ev}} \quad (27.11)$$

$$\mathrm{E_{ev}(n)} = \sqrt{\frac{\hbar * c}{4 * L_p * e_0} * \varepsilon_{ev}} \quad (27.12)$$

Ein Übergang von 1 μeV würde dann korrekt auf die Super-Feinstruktur schließen, wenn der Grundzustand den Betrag

$$\mathrm{E_{ev}}(\varepsilon_{ev}) = \sqrt{3{,}05225 * 10^{27} * 10^{-6}}eV \quad (27.13)$$

$$\mathrm{E_{ev}}(\varepsilon_{ev}) = 5{,}82356 * 10^{10}eV \quad (27.14)$$

$$\mathrm{E_{ev}}(\varepsilon_{ev}) = 58{,}2356\ GeV \quad (27.15)$$

erreicht. Der Unterschied vom Grundzustand entspräche relativ

$$\varepsilon_{ev}/\mathrm{E_{ev}}(\varepsilon_{ev}) = 1{,}7171 * 10^{-17} \quad (27.16)$$

Eine derartige Messung erscheint nahezu aussichtlos, wäre aber immer noch weit einfacher als zu versuchen die Planck-Energie direkt zu erreichen. Immerhin erreichen moderne Beschleuniger-Anlagen Energien im Bereich von einigen TeV. Die gemessene Masse des Higgs-Bosons liegt sogar über diesem Wert.

28 Ein Vergleich spekulativer Theorien

Die Stringtheorie ersetzt Punktteilchen ebenfalls durch endlich ausgedehnte Strukturen. Doch ist unklar, wie ihre höheren Dimensionen kompaktifiziert werden müssen. Es gibt praktisch unendlich viele Möglichkeiten. Anzahl und Natur der Teilchen hängen jedoch von der Art ab, wie die Dimensionen kompaktifiziert werden.

Die Struktur der ART ergab sich aus der tiefen Einsicht in die Logik der physikalischen Gesetze. Dagegen fehlt in der Stringtheorie ein generelles Verständnis von deren Logik.

Stringtheorie ist in einem Hintergrund-Raum formuliert. Sie ist damit weder diffeomorphismus-invariant noch Hintergrund-unabhängig.

In direkter Rechnung liegen Energien von Strings immer über der Planck-Energie. Wie sich hieraus die Energien von Elementarteilchen ableiten lassen sollen, ist vollkommen unklar.

Ein Indiz für die Richtigkeit der Stringtheorie wäre die Entdeckung eines oder mehrerer Superpartnerteilchen. Dies würde zwar zunächst nur die Supersymmetrie beweisen, die auch schon in auf Punktteilchen basierende Modelle eingegliedert werden konnte, dennoch wäre dies ein wichtiger Fund für die Stringtheorie. Doch es gibt bislang keinerlei Hinweise auf solche Teilchen.

Die Loop-Quantengeometrie basiert hingegen grundlegend auf den Prinzipien der ART. Doch deutet sie den Teilchen-Begriff nicht um, sondern behandelt Teilchen als in die Berechnungen gegebene Entitäten. Das sich ergebende Spin-Schaum-Modell ist unglaublich komplex. Es ist nicht klar, wie sich das oberhalb der Planck-Länge kontinuierliche und stetige Verhalten der Raumzeit als Grenzwert des diskreten Netzes von Knoten ergeben soll. Außer in ganz bestimmten Teil-Lösungen.

Aus einer speziellen Variante der Schleifenquantengravitation mit kosmologischer Konstante folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Diese Dispersion müsste über sehr lange Laufzeiten hochenergetischer Gammastrahlung zu detektierbaren Effekten führen. Experimente wie GLAST haben hier kein Ergebnis erbracht. Die Raumzeit erscheint „glatter“, als die Loop-Quanten-Geometrie es voraussagt.

Um aus der Theorie die Wahrscheinlichkeit eines (quantenmechanischen) Prozesses in der klassischen Raumzeit zu berechnen, muss eine unendliche Anzahl von Konstanten über zusätzliche plausible Annahmen festgelegt werden. Die Situation ist also nicht besser als bei dem Versuch der kanonischen Quantisierung der (nichtrenormierbaren) allgemeinen Relativitätstheorie.

Die vorliegende Ausarbeitung deutet die mechanischen Eigenschaften von Elementarteilchen als Ergebnis einer reinen Feldstruktur in vier Dimensionen. Kontraktionen bestimmter Form wirken faktisch als ausgleichende Größe für die Dilatation der Raumzeit und werden als quantenmechanisch bedingte Fluktuationen eben der Raumzeit eingeführt. Quellterme können abgeleitet werden, anstatt sie voraus zu setzen.

Es treten extremal metrische Singularitäten auf. Doch diese sind rein relativ bzw. ein Artefakt der verwendeten Koordinaten. Tatsächlich ist die definierte Feldform überall endlich. Durch Einbringen der Plancklänge im Allgemeinen und der beschränkten, quantenhaften geodätischen Störung im Besonderen, treten keine intrinsischen Krümmungs-Singularitäten in Erscheinung. Im Gegenteil bleibt das Spektrum der bisher betrachteten linearen Wellengleichung in beide Richtungen beschränkt.

Vorausgesetzt der Kollaps der Wellenfunktion reproduziert auf dieser Basis ein stetiges Feld, das dem Außenfeld eines Punktteilchens entspricht, hat dieses immer eine endliche Energiedichte und maximal die Planckenergie. Dabei soll die allgemeinste Darstellung auf der Tensor-Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie beruhen und die koordinatenbehaftete Quantenmechanik nur eine mögliche Lösung sein. Bis zum Übergang zur voll quantenmechanischen Lösung - also der Einbeziehung des Wahrscheinlichkeits-Aspekts - folgt die Logik dieser Interpretation der inhärenten Logik der ART.

Der Übergang zur Differentialgeometrie erfolgt bis zu diesem Punkt einfach durch den Limes verschwindender Wirkung (h gegen Null).

Die Lichtgeschwindigkeit ist absolut invariant, da die verwendeten Gleichungen der allgemeinen Relativität zu Grunde liegen. Die Invarianz bleibt solange erhalten, solange sich kein stringenter Zusammenhang mit noch zu findenden Variationen der Grundlagen der ART ergibt.

27 Der geometrische Ansatz zur Materie

Bis zu diesem Punkt wurden lediglich lichtschnelle Störungen der Raum-Struktur in Zusammenhang mit der Quantenmechanik gebracht. Darüber konnten schon einige Zusammenhänge erläutert, die wichtigsten Größen eruiert und die Grenzen des Modells linearer Wellen-Geometrodynamik erfasst werden.

Was nun in erster Linie erarbeitet werden soll, zielt auf die geometrische Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung und der Dirac-Gleichung ab.

Da der intrinsische Spin der Fermionen sich auf herkömmliche Weise nicht identifizieren lässt, wird hier zunächst eine Diskussion über die Klein-Gordon-Gleichung geführt und anschließend versucht, indirekt die Dirac-Gleichung abzuleiten.

Gemäß Gleichung 24.1 ergibt sich der Eigenzustand eines quantenmechanischen Systems über den Hamilton-Operator. Die Schrödinger-Gleichung ist in dem Zusammenhang jedoch nicht lorentzinvariant. Für relativistische Geschwindigkeiten muss die Energie-Impuls-Relation der speziellen Relativitätstheorie angesetzt werden:

$$E^2 = \mathrm{m}_0^2 * \mathrm{c}^4 + \mathrm{p}^2 * \mathrm{c}^2 \qquad (27.1)$$

Für verschwindende Ruh-Masse ergibt sich automatisch die Energie-Impuls-Beziehung für lichtartige Vorgänge, die in den vorigen Kapiteln auf Gravitations-Wellen angewandt wurde.

$$E_r = \mathrm{p} \quad * \mathrm{c} \qquad (27.2)$$

Für verschwindenden räumlichen Impuls ergibt sich ebenfalls ein linearer Zusammenhang, was die Lösungsfindung erleichtert

$$E_0 = \mathrm{m}_0 \ * \mathrm{c}^2 \qquad (27.3)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung ersetzt nun den Hamilton-Operator der Schrödinger-Gleichung in der Weise, dass die Eigenwerte mit der relativistischen Energie-Impuls-Relation in Einklang stehen. Allerdings ist die Ruhmasse ein Parameter und erfährt keine Deutung. Gemäß dem Korrespondenz-Prinzip für eine Wellengleichung folgt

$$E \quad \rightarrow \mathrm{i}\hbar \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \qquad (27.4)$$

$$p \quad \rightarrow -i\hbar\nabla \qquad (27.5)$$

$$\left(\mathrm{i}\hbar \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^2 \Psi = (\hbar^2 \mathrm{c}^2 \Delta + \mathrm{m}_0^2 * \mathrm{c}^4)\Psi \qquad (27.6)$$

Das Gravitations-Feld einer Masse im Allgemeinen ist nun radialsymmetrisch in drei Dimensionen. In der (äußeren) Schwarzschild-Lösung wird zusätzlich das Verschwinden einer zeitlichen Variation vorausgesetzt. Auch sie erklärt das Quellenfeld nicht, auch nicht wenn die sogenannte innere Lösung ergänzt wird. Die Vorgabe ist immer noch eine Energie-

Dichte-Verteilung. In erster Linie wird diese als inkompressible Flüssigkeits-Kugel approximiert.

Im Folgenden wird die geodätische Störung $\mathbf{S_p}$ analog zur Schwarzschild-Gleichung auf drei Dimensionen angewandt, ausgehend von der Minkoswki-Metrik mit positiver Signatur 2:

$$-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \tag{27.7}$$

Die raum-zeitliche Entwicklung sei wieder eine Wellenfunktion. Die Entwicklung verschwindet in der Quantenmechanik für verschwindende räumliche Propagation offensichtlich nicht. Es bleibt eine hochfrequente Komponente, welche der Ruhmasse entspricht.

Diese soll als eine innere, dreikomponentige Störung der Geometrie gedeutet werden, welche nun symmetrisch ausfällt. Diese sei immer transversal zur Eigenzeit.

$$S_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{3}} * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_r \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t})} \tag{27.8}$$

Die Normierung folgt aus der Dreidimensionalität des Raumes bzw. der Zahl der Freiheitsgrade.

Da nun eine allgemeinere Grundfunktion diskutiert wird, stellt sich die Frage nach ihrer Invarianz unter Lorentz-Transformation.

Skalare Größen sind immer invariant. Die Störung muss immer symmetrisch zum Schwerpunkt-System bleiben. Wie ändern sich Komponenten und Wellenfunktion?

Eine raumzeitliche Entwicklung implementiert eine räumliche Wellenzahl. Diese geht in die Frequenz zusätzlich ein.

Die drei räumlichen Koordinaten sind untereinander vertauschbar. Hier kann zunächst eine Richtung allein betrachtet werden. Die spezielle Lorentz-Transformation ist dann, als imaginäre Drehung aufgefasst

$$\Lambda(\o) = \mathrm{e}^{\o \mathrm{K_r}} = \begin{pmatrix} \cosh(\o) & \sinh(\o) & 0 \\ \sinh(\o) & \cosh(\o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27.9}$$

$$S_{\mu\nu} = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{3}} * \varphi_{\mu\nu} * \mathrm{F}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}) = \mathrm{S}_p * \frac{1}{\sqrt{3}} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega * \mathrm{t} - \mathrm{k} * \mathrm{z})} \tag{27.10}$$

Die allgemeine, homogene Lorentz-Transformation (SRT.pdf!!!) ist gegeben durch

$$\Lambda(\vec{\o}, \vec{\varphi}) = \mathrm{e}^{\overrightarrow{\o \mathrm{K} + \varphi \mathrm{J}}} \tag{27.11}$$

Mit infinitesimalen Erzeugenden für Boost und Drehung

$$\vec{\mathrm{K}} = (\mathrm{K_x}, \mathrm{K_y}, \mathrm{K_z})$$

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$$

Bei Vernachlässigung einer Dann folgt für eine konstante räumliche Koordinate

Die symmetrische Lösung ist vergleichsweise trivial und korrespondiert mit der punktsymmetrischen Schwarz-Schild-Metrik.

Die nächste Erweiterung könnte analog zur Lösung der Kerr-Metrik einen neuen Freiheitsgrad einführen, welcher einen intrinsischen Drehimpuls ergibt.

Hierzu wird die Überlegung aufgestellt, dass abweichend von der bisherigen globalen Eigenzeit, die ja auch als Symmetrie-Achse gesehen wird, eine räumliche Ringsymmetrie auftritt. Dazu wird angenommen, dass, analog zur Ring-Singularität der Kerr-Lösung, die elementare Struktur räumlich nicht zentral divergiert, sondern ringartig.

Die Lösung wäre einem Drehimpuls proportional, dies aber nur aus Symmetrie-Gründen.

Tatsächlich wäre der Drehimpuls, als eigener Freiheitsgrad aufgefasst, eine invariante Größe:

$$\vec{L_\iota} = \vec{r_\imath} \times \vec{p_\imath} = \vec{r_\imath} \times \left(\hbar * \vec{k_\imath}\right) \tag{27.9}$$

Wenn die Wellenlänge aus Gründen der Kontinuität, geschlossen und als räumlicher Umfang auftritt folgt zwanglos:

$$\vec{L_\iota} = \vec{r_\imath} \times \left(\hbar * \frac{\vec{d}}{du} * e^{i(k*u)}\right) = \vec{r_\imath} \times \overrightarrow{(\hbar * 2 * \pi/u)} \tag{27.10}$$

Mit der Wellenlänge identisch zum Umfang

$$\vec{L_\iota} = \vec{r_\imath} \times \overrightarrow{(\hbar/r_\imath)} \tag{27.11}$$

Da keine weiteren Größen in das Ergebnis eingehen, stehen Impuls und Radius-Vektor immer senkrecht aufeinander und der Drehimpuls ist immer das Drehimpuls-Quantum

$$|L_i| = \hbar \tag{27.12}$$

Insofern ist dieser zusätzliche Freiheitsgrad eigentlich keiner. Die Freiheit liegt lediglich in den 3 zueinander senkrechten, möglichen Ausrichtungen im dreidimensionalen Raum.

Das Trägheitsmoment bedingt sich in Folge über die Grundfrequenz zu

$$L = J * \omega = J * c * k_0 = J * c * m_0 * \frac{c}{\hbar} \tag{27.13}$$

$$J = \hbar^2/(m_0 * c^2) \tag{27.13}$$

Der hier definierte Drehimpuls tritt unabhängig von irgendeiner Translation durch den Raum in Erscheinung. Es ist auch nicht so, dass eine gegebene Masse wirklich rotiert. Es ist lediglich eine Forderung an einen zusätzlichen Freiheitsgrad, dass eine bestimmte Symmetrie eine intrinsische Größe induziert.

Eine dreidimensionale Punkt-Symmetrie wird nun ein Spezialfall einer allgemeineren Axial-Symmetrie.

In einem Minkowski-Diagramm, wird aus der Ringform eine spiralige um die Eigenzeit als Symmetrie-Achse. Innerhalb einer Periode der zugrundegelegten Grundfrequenz (bzw. Ruhmasse) muss eine volle Umdrehung in Erscheinung treten. Diese ist somit offensichtlich eine Erhaltungsgröße.

Für „makroskopische“ Ruhemassen fällt der Term des intrinsischen Trägheitsmoments automatisch weg.

Für verschwindende Ruhe-Masse geht er zunächst einmal gegen unendlich. Andererseits muss hier noch die Lücke zu lichtartigen Vorgängen geschlossen werden.

Ein Teilchen ohne Ruhemasse bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit. Und die Helizität wird eine konstante Größe. Ein gegen unendlich gehendes Masse-Trägheitsmoment repräsentiert automatisch die Unmöglichkeit, eine Abweichung der Helizität zu definieren.

Lösung durch Erweiterung der Theorie

Um das Dilemma zwischen Quantenmechanik und Gravitation zu lösen, haben wir die Wellenfunktion in die komplexe Schreibweise gebracht und sehen uns nun vor der Schwierigkeit dieser eine physikalische Realität zuzugestehen.

Es erscheint möglich, indem wir die reellen Dimensionen des Raumes mit imaginären Komponenten ergänzen. Um diesen Ansatz einheitlich auf die ganze Theorie anzuwenden, erscheint es notwendig, auch die imaginäre Zeit mit einer reellen Komponente zu ergänzen.

In gewisser Hinsicht rechnen wir plötzlich nicht mehr in vier sondern in acht Dimensionen!

Vielleicht kann man diesen Umstand auch besser als Wechselwirkung zwischen zwei vierdimensionalen Kontinua auffassen, welcher sich durch neue, innere, Freiheitsgrade ausdrückt. Die komplexen Phasen, welche im rein reellen unmöglich zu verstehen sind und das Problem des quantenmechanischen Spin!

Bislang war das Vorzeichen der metrischen Komponenten und ihrer Spur reine Konvention. Nunmehr erscheint das Vorzeichen, wenn auch als vom Beobachter abhängige - relative-Größe, als wichtiger Aspekt der Quantenmechanik. Es ergibt neue Freiheitsgrade.

Zeit und Raum

Durch die Erweiterung der Dimensionen zu komplexen Ausdrücken sind - zumindest rein rechnerisch - Raum und Zeit völlig gleichwertig. Beide sind nunmehr weder rein reell noch rein imaginär, sondern einheitlich komplex. Alle vier Dimensionen können in erster Näherung völlig gleich behandelt werden. Die Zeit unterscheidet sich nunmehr nur noch durch einen konstanten Phasenfaktor von den räumlichen Dimensionen.

$$\varphi_0 = \mp\frac{\pi}{2}$$

Wie bekannt ist, sind derartige Ausdrücke jedoch gemäß dem Prinzip der Eichfreiheit physikalisch nicht relevant!

Quellen-Verzeichnis

[1] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 26-28

[2] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 13

[3] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 22

[4] Christian Scholz Theorie der Gravitationswellen: Seite 20

[5] N. Borghini Elementarteilchenphysik - Relativistische Quantenmechanik: Seite 21

[6] Albert Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann: *The Gravitational Equations and the Problem of Motion*. Annals of Mathematics Second series 39 (1): S. 65–100, 1938